Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir maison n°2

Solution

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.

On note $\mathbb{0}$ l'endomorphisme nul de E et Id l'endomorphisme identité.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et f endomorphisme de E, on définit par récurrence l'endomorphisme f^n par : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Un endomorphisme f de E est dit *nilpotent* si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \mathbb{0}$. Notons qu'alors, pour tout entier $p \geqslant n$, on a $f^p = \mathbb{0}$.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des endomorphismes nilpotents.

Partie I : Deux exemples

1. Dans cette question (et celle là seulement), on prend $E = \mathbb{K}^3$ et pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ on pose

$$\varphi(u) = (-2x + y\,,\ -3x + y + z\,,\ -x + z)\,.$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$.

Solution. Soient $u = (x, y, z)$, $u' = (x', y', z') \in \mathbb{K}^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$ donc

$$\begin{aligned}\varphi(u + \lambda v) &= ((-2x + y) + \lambda(-2x' + y')\ ,\ (-3x + y + z) + \lambda(-3x' + y' + z')\ ,\ (-x + z) + \lambda(-x' + z')) \\ &= \varphi(u) + \lambda\varphi(v)\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire, et de plus il est clair que $\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$.
Ainsi φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$. □

b. Justifier que $\varphi^2(u) = (x - y + z) \cdot v$, où $v = (1, 2, 1)$.

Solution. $\varphi^2(u)$ a pour composantes

$$\begin{cases} -2(-2x + y) + (-3x + y + z) = (x - y + z) \\ -3(-2x + y) + (-3x + y + z) + (-x + z) = 2(x - y + z) \\ -(-2x + y) + (-x + z) = (x - y + z) \end{cases}$$

donc on a bien $\varphi^2(u) = (x - y + z) \cdot v$, où $v = (1, 2, 1)$. □

c. En déduire que φ est nilpotent.

Solution. Par linéarité, $\varphi^3(u) = (x - y + z) \cdot \varphi(v)$, et on a facilement $\varphi(v) = (0, 0, 0)$. On a donc $\varphi^3 = \mathbb{0}$ et donc φ est nilpotent. □

2. Dans cette question, et celle là seulement, on prend $E = \mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et on définit, pour tout $P \in E$,

$$\Delta(P(X)) = P(X + 1) - P(X)\,.$$

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution. On a

$$\begin{aligned}\Delta(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1)-(P+\lambda Q)(X)\\ &= [P(X+1)-P(X)]+\lambda[Q(X+1)-Q(X)]\\ &= \Delta(P)+\lambda\Delta(Q)\end{aligned}$$

par définition des opérations sur les polynômes. Ceci prouve que Δ est linéaire.
$P(X+1)$ et $P(X)$ sont tous deux de même degré que P, lui même inférieur ou égal à n, donc $\deg(\Delta(P)) \leqslant \max(\deg(P(X+1)), \deg(P(X))) = \deg(P) \leqslant n$. Ceci prouve que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par Δ, et finalement que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

On pose $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = \dfrac{X(X-1)}{2!}$, et plus généralement, $P_m = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1}(X-k)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

b. Justifier que $B_n = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution. $B_n = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$, échelonnée en degrés et de cardinal $(n+1) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$, donc B_n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

c. Calculer $\Delta(P_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Solution. On a déjà $\Delta(P_0) = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$ est le polynôme nul, et $\Delta(P_1) = X+1-X = P_0$.
De plus pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\Delta(P_k) &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(X+1-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right)\\ &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=-1}^{k-2}(X-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)\right)\\ &= \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-2}(X-i)\right)[(X+1)-(X+1-k)]\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\prod_{i=0}^{k-2}(X-i) = P_{k-1}\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule ci-dessus : $\Delta(P_k) = P_{k-1}$. $\square$

d. En déduire le rang de Δ, puis déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.

Solution. Ainsi $\Delta(B_n) = \left(0_{\mathbb{K}_n[X]}, P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\right)$. Or le rang de $\Delta(B_n)$ est celui de $(P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}) = B_{n-1}$, soit n. Enfin $\mathrm{rg}(\Delta(B_n)) = \mathrm{rg}(\Delta)$ (car B_n est une base de E donc $\Delta(B_n)$ génère $\mathrm{Im}(\Delta)$) a donc $\mathrm{rg}(\Delta) = n$.
La formule du rang donne alors $\dim(\mathrm{Ker}\Delta) = 1$. Comme $P_0 \in \mathrm{Ker}\Delta$, on a donc $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{vect}(P_0) = \mathbb{K}_0[X]$.
Enfin on a $\mathrm{Im}\,\Delta = \mathrm{vect}(\Delta(B_n)) = \mathrm{vect}(B_{n-1}) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ soit $\mathrm{Im}\,\Delta = \mathbb{K}_{n-1}[X]$. $\square$

e. Établir que Δ est un endomorphisme nilpotent.

Solution. Une récurrence immédiate donne $\Delta^p(P_k) = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}_n[X]} & \text{si } p > k \\ P_{k-p} & \text{si } p \leqslant k \end{cases}$. On a alors $\Delta^{n+1}(P_k) = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et donc $\Delta^{n+1} = \mathbb{0}$ (car Δ s'annule sur tous les vecteurs d'une base). Cela prouve que Δ est un nilpotent. $\square$

Partie II : Propriétés générales

3. Soit p un projecteur de E.

a. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que p soit nilpotent.

Solution. Soit p un projecteur de E. On a $p \circ p = p$ et, par récurrence immédiate, $p^n = p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour qu'un projecteur p soit nilpotent, il est donc nécessaire et suffisant que $p = \mathbb{0}$. $\square$

b. Une symétrie de E peut-elle être nilpotente ?

Solution. De même, si s est une symétrie on a $s^2 = \mathrm{Id}$ donc $s^n = \begin{cases} s & \text{si } n \text{ est impair} \\ \mathrm{Id} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.
Cela prouve qu'une symétrie ne peut pas être nilpotente. $\square$

4. Soient f et g deux endomorphismes de E.

a. Montrer que si f est nilpotent et que f et g commutent alors $f \circ g$ est nilpotent.

Solution. Si f est nilpotent, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = \mathbb{0}$, et si f et g commutent alors $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n = \mathbb{0}$, ce qui établit que $f \circ g$ est lui aussi nilpotent.
Si f est nilpotent et que f et g commutent alors $f \circ g$ est nilpotent. □

b. Établir que si $f \circ g$ est nilpotent alors $g \circ f$ est nilpotent.

Solution. Si $f \circ g$ est nilpotent, soit n tel que $(f \circ g)^n = \mathbb{0}$. Comme $g \circ (f \circ g)^n \circ f = (g \circ f)^{n+1}$, on en déduit que $(g \circ f)^{n+1} = \mathbb{0}$ et donc que $g \circ f$ est nilpotent. Si $f \circ g$ est nilpotent alors $g \circ f$ est nilpotent. □

5. Soit f un endomorphisme nilpotent de E.

a. Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{Id} - f$ est inversible.

Solution. Soit n tel que $f^n = \mathbb{0}$. On a alors (penser à la factorisation de $1 - X^n$ par $1 - X$ pour deviner le résultat et donc l'inverse):

$$(\mathrm{Id} - f) \circ \sum_{k=0}^{n-1} f^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f^k - f^{k+1}\right) = \mathrm{Id} - f^n = \mathrm{Id}$$

ce qui prouve que $(\mathrm{Id} - f)$ est inversible, d'inverse $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$. □

b. Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = \mathbb{0}$.
Cet entier est appelé l'indice de nilpotence de l'endomorphisme nilpotent f, et on le note $\nu(f)$.

Solution. L'ensemble des entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k = \mathbb{0}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ (car f est nilpotent par hypothèse) et minorée, et donc elle admet un plus petit élément. □

6. Soit f un endomorphisme nilpotent de E, et $\nu(f)$ son indice de nilpotence. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $N_p = \mathrm{Ker}(f^p)$.

a. Déterminer $N_{\nu(f)}$.

Solution. $N_{\nu(f)} = \mathrm{Ker}\left(f^{\nu(f)}\right) = \mathrm{Ker}(\mathbb{0}) = E$ donc $N_{\nu(f)} = E$. □

b. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.

Solution. Si $u \in N_p$ alors $f^p(u) = 0_E$ donc par linéarité, $f(f^p(u)) = f^{p+1}(u) = 0_E$ d'où $u \in N_{p+1}$. Cela prouve $N_p \subset N_{p+1}$. □

c. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(N_p) = \dim(N_{p+1})$, alors $N_p = N_{p+q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Solution. Montrons par récurrence que $N_p = N_{p+q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

- ✗ Initialisation. Si $\dim N_p = \dim N_{p+1}$, comme on a déjà prouvé $N_p \subset N_{p+1}$, on en déduit $N_p = N_{p+1}$.

- ✗ Hérédité. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $N_p = N_{p+q}$. Pour $u \in N_{p+q+1}$, on a alors $f^{p+q+1}(u) = f^{p+1}(f^q(u)) = 0_E$, donc $f^q(u) \in N_{p+1}$. Comme $N_p = N_{p+1}$, on a aussi $f^q(u) \in N_p$, donc $f^p(f^q(u)) = 0_E$ puis $u \in N_{p+q} = N_p$. Ainsi $N_{p+q+1} \subset N_p$.
  Comme par **4.b.** on a $N_p = N_{p+q} \subset N_{p+q+1}$, on en déduit l'égalité et finalement l'hérédité de la propriété. D'où le résultat.

S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim N_p = \dim N_{p+1}$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.

□

d. En déduire que $\nu(f) \leqslant \dim E$.

Solution. $\nu(f)$ étant le plus petit entier tel que $N_{\nu(f)} = E$, on en déduit par contraposée et par **4.b.** que la suite des dimensions $(\dim N_p)_{0 \leqslant p \leqslant \nu(f)}$ est strictement croissante. Comme c'est une suite d'entiers naturels, on a donc $\forall p \in [\![0, \nu(f)]\!],\ \dim N_p \geqslant p$. En particulier $\dim N_{\nu(f)} \geqslant \nu(f)$.
Par ailleurs on a aussi $\dim N_{\nu(f)} \leqslant \dim E$, et par transitivité, $\nu(f) \leqslant \dim E$. □

Partie III : Commutant d'un endomorphisme nilpotent maximal

Dans cette partie, on note $n = \dim(E)$, et on considère un endomorphisme f nilpotent tel que $\nu(f) = n$ (il est alors dit *maximal*), et on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec f.

7. Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Solution. Soient g et h dans $C(f)$ et λ un scalaire. On a alors $f \circ (g + \lambda h) = f \circ g + \lambda f \circ h$ (dans $\mathcal{L}(E)$ la loi $\circ$ est distributive sur l'addition) puis $f \circ (g + \lambda h) = g \circ f + \lambda h \circ f$ (en commutant) et enfin $f \circ (g + \lambda h) = (g + \lambda h) \circ f$. Enfin $C(f)$ est évidemment non vide, car il contient par exemple le vecteur nul.
Cela prouve que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. □

8. Soit $g \in C(f)$.

a. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

Solution. Par définition de l'indice de nilpotence on a $f^{n-1} \neq \mathbb{0}$ donc $\exists x_0 \in E,\ f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. □

b. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ constitue une base de E.

Solution. On a déjà $\operatorname{card}(\mathcal{B}) = n = \dim E$; il suffit donc de prouver que la famille est libre.

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$. En composant successivement par $f^{n-1}, f^{n-2}, \ldots, f$, on obtient successivement $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, puisque $f^p(x_0) = 0_E$ pour $p \geqslant n$ et $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
La famille est donc libre.
Ceci prouve que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. □

c. On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ les coordonnées du vecteur $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Exprimer, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $g\left(f^k(x_0)\right)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Solution. Puisque $g \in C(f)$ on a

$$\begin{aligned} g\left(f^k(x_0)\right) &= f^k\left(g(x_0)\right) \\ &= f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^k\left(f^i(x_0)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{i+k}(x_0) \end{aligned}$$

et comme $f^p(x_0) = 0_E$ pour $p \geqslant n$, il vient $g\left(f^k(x_0)\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1-k} a_i f^{i+k}(x_0)$. □

d. En déduire que $g = a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Solution. L'égalité précédente montre que, si l'on ne supprime pas les puissances de f nulles, on obtient pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$: $g\left(f^k(x_0)\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i\left(f^k(x_0)\right)$.

Les deux endomorphismes g et $h = a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i$ coïncident donc sur la base $\mathcal{B}$, et par linéarité, sur E tout entier. Ainsi $g = a_0 \mathrm{Id} + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$. □

9. a. Déduire de ce qui précède que $C(f) = \operatorname{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.

Solution. De ce qui précède découle immédiatement l'inclusion $C(f) \subset \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$.
f commute évidemment avec lui même, et donc avec toutes ses puissances, d'où découle l'inclusion réciproque et enfin l'égalité.

$$C(f) = \operatorname{vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1}).$$

□

b. Déterminer la dimension de $C(f)$.

Solution. On vient de montrer que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille génératrice de $C(f)$. On va montrer qu'elle est libre.

Pour cela, considérons des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = \mathbb{0}$.

Cette égalité est notamment vraie pour le vecteur x_0, et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$.

$\mathcal{B}$ étant libre, on en déduit $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.
Cette famille est donc une base de $C(f)$, ce qui prouve $\dim C(f) = n$. □

10. On considère de nouveau l'endomorphisme Δ de $\mathbb{K}_n[X]$ défini à la **Question 2.** de la **Partie I.**, et on note D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$, défini pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ par $D(P) = P'$.

a. Justifier que D est un endomorphisme nilpotent maximal de $\mathbb{K}_n[X]$.

Solution. D est clairement linéaire.
$\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D puisque la dérivée d'un polynôme est un polynôme de degré inférieur.
$D^{n+1} = \mathbb{0}$ puisque pour tout polynôme, sa dérivée d'ordre supérieur à son degré est nulle. Enfin $D^n \neq \mathbb{0}$ puisque $D^n(X^n) = n! \neq 0_{\mathbb{K}_n[X]}$.
Tout ceci prouve que D est un endomorphisme nilpotent maximal de $\mathbb{K}_n[X]$. □

b. Montrer que $\Delta \in C(D)$.

Solution. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. On a

$$(\Delta \circ D)(P) = P'(X+1) - P'(X)$$

et encore

$$(D \circ \Delta)(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(P(X+1) - P(X)).$$

Les règles de dérivation des fonctions composées montrent l'égalité de ces deux expressions, et donc que $\Delta \circ D = D \circ \Delta$. □

c. En déduire qu'il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\Delta = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k$.

Solution. La Question **3.a** donne directement le résultat.

$$\text{Il existe des scalaires } \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \text{ tels que } \Delta = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k D^k.$$

□

d. Donner les valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Solution. La formule de Taylor à l'ordre n, pour un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$, appliquée entre X et $X+1$, s'écrit

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X+1-X)^k}{k!} D^k(P)(X),$$

soit

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k(P)(X),$$

d'où l'on déduit $\Delta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} D^k$. □