Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir maison n°3

À rendre le 5/11

Exercice 1

Le plan usuel $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthonormé direct, on s'intéresse à la courbe γ, paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)$ où $M(t)$ est le point de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t) \end{array} \right.$$

1. Justifier que pour dessiner le support de γ, une étude sur $[0, \pi]$ suffit et préciser toutes les transformations géométriques nécessaires pour obtenir la totalité de ce support.

   On note γ_1 la partie de la courbe de γ lorsque le paramètre t décrit l'intervalle $[0, \pi]$.

2. Vérifier que la courbe γ_1 possède deux points singuliers, un premier point obtenu pour le paramètre $t = 0$ et un second point, noté I, obtenu pour un autre paramètre $t = t_0$ que l'on déterminera.

3. Donner l'allure de la courbe au voisinage du point origine O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4. Montrer que le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ dirige la tangente à γ_1 en I puis donner une équation de cette tangente.

   ☞ *On admettra que le point I est un point de retroussement de première espèce.*

5. Dresser un tableau donnant les variations conjointes ainsi que les valeurs remarquables des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.

6. Tracer dans $\mathcal{P}$ le support de la courbe γ.

7. Montrer que la courbe γ est invariante par la rotation de centre $\Omega(3, 0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

   ☞ *Indication* : on pourra exploiter avec profit l'expression d'une telle rotation à l'aide de nombres complexes.

8. (Réservé aux 5/2). Calculer a longueur de la portion de γ lorsque le paramètre t décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Exercice 2

Le but de l'exercice est une introduction à la notion de polynôme minimal d'une matrice.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $P(A)$ la matrice : $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k$, et on dit que P est un *polynôme annulateur* de A si et seulement si $P(A)$ est la matrice nulle.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 2y + z, -x - y, 0)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
b. Calculer M^3 et en déduire un polynôme annulateur de M.

Dans la suite on note $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble de tous les polynômes annulateurs de A :

$$\mathcal{N}(A) = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(A) = \mathbb{0}_n\}$$

où $\mathbb{0}_n$ désigne la matrice nulle de taille n.

2. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un espace vectoriel.

3. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ contient au moins un polynôme non nul.
☞ *Indication :* On pourra considérer la famille $\left(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

4. On note p_0 le degré minimal d'un polynôme annulateur non nul, et on considère un polynôme $P_0 \in \mathcal{N}(A)$ de degré p_0.

a. Justifier que $p_0 \in \mathbb{N}^*$.
b. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des polynômes divisibles par P_0 (on pourra considérer, pour $P \in \mathcal{N}(A)$, la division euclidienne de P par P_0).
c. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme de degré p_0, annulateur de A et de coefficient dominant égal à 1.

Ce polynôme sera noté π_A et nommé le *polynôme minimal* de A.

5. Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

6. Soit P un polynôme de coefficient dominant 1, et p son degré.

a. Montrer que $P = \pi_A$ si et seulement si $P \in \mathcal{N}(A)$ et aucun diviseur de P de degré strictement inférieur à p n'est annulateur de A.
b. Dans cette question et dans cette question uniquement, on choisit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme minimal de A.

7. Dans cette question et dans cette question uniquement, on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et on construit la matrice B à 4 lignes et 9 colonnes de la façon suivante : pour $i \in [\![1, 4]\!]$, la $i^{ème}$ ligne s'obtient en écrivant bout à bout les lignes de la matrice A^{i-1}.

a. Donner les coefficients de la matrice B.
b. À l'aide d'un pivot de Gauss, déterminer le rang de B.
c. En déduire que (I_3, A, A^2, A^3) est liée, et écrire une relation de dépendance linéaire entre ces quatre matrices.
d. Donner alors π_A.
e. **Application** : Déduire de ce qui précède la matrice A^k pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.
☞ *On commencera par calculer le reste dans la division euclidienne de X^k par π_A.*