



Devoir maison n°3

Solution

Exercice 1

Le plan usuel $\mathcal{P}$ étant rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct, on s'intéresse à la courbe γ , paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)$ où $M(t)$ est le point de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ avec

$$\begin{cases} x(t) &= 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

- Justifier que pour dessiner le support de γ , une étude sur $[0, \pi]$ suffit et préciser toutes les transformations géométriques nécessaires pour obtenir la totalité de ce support.

Solution. Les fonctions x et y sont 2π périodiques donc on peut se restreindre à $t \in [-\pi, \pi]$ pour obtenir tout le support de γ . De plus, x étant paire et y étant impaire, le point de paramètre $-t$ s'obtient à partir de celui de paramètre t par une symétrie orthogonale la symétrie d'axe (Ox) . C'est pourquoi on peut se restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$. $\square$

On note γ_1 la partie de la courbe de γ lorsque le paramètre t décrit l'intervalle $[0, \pi]$.

- Vérifier que la courbe γ_1 possède deux points singuliers, un premier point obtenu pour le paramètre $t = 0$ et un second point, noté I , obtenu pour un autre paramètre $t = t_0$ que l'on déterminera.

Solution. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \pi]$ et

$$\begin{cases} x'(t) = 2\sin t + 2\sin 2t = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

On en déduit que le vecteur dérivé est nul sur $[0, \pi]$ si et seulement si $t = 0$ ou $t = \frac{2\pi}{3} = t_0$. On désigne par I le point de paramètre t_0 . $\square$

- Donner l'allure de la courbe au voisinage du point origine O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Solution. Un développement limité en 0 à l'ordre 3 de chacune des fonctions coordonnées donne :

$$\begin{cases} x(t) &= 3t^2 + o(t^3) \\ y(t) &= t^3 + o(t^3) \end{cases}$$

C'est à dire :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{o}(t^3)$$

d'où l'on déduit les deux faits suivants :

- ✗ la tangente en $M(0) = O$ à la courbe est dirigée par le vecteur $\vec{i}$, par conséquent elle a pour équation $y = 0$;
- ✗ les vecteurs dérivés d'ordre 2 et 3 n'étant pas colinéaires, le couple des entiers caractéristiques (p, q) vaut $(2, 3)$ prouvant que l'on a affaire un point de rebroussement de première espèce.

Par ailleurs, pour $t \in [0, \pi]$, $y \geq 0$, donc la courbe est située au-dessus de sa tangente voisine de 0. $\square$

4. Montrer que le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ dirige la tangente à γ_1 en I puis donner une équation de cette tangente.

Solution. Puisque le vecteur $\begin{pmatrix} x''(2\pi/3) \\ y''(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$, ce dernier dirige bien la tangente $\mathcal{T}$ à γ_1 en I . Une équation de $\mathcal{T}$ s'obtient alors en écrivant que : $M \in \mathcal{T} \iff \det(\overrightarrow{IM}, \vec{u}) = 0$, ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0.$$

$\square$

☞ On admettra que le point I est un point de retournement de première espèce.

5. Dresser un tableau donnant les variations conjointes ainsi que les valeurs remarquables des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.

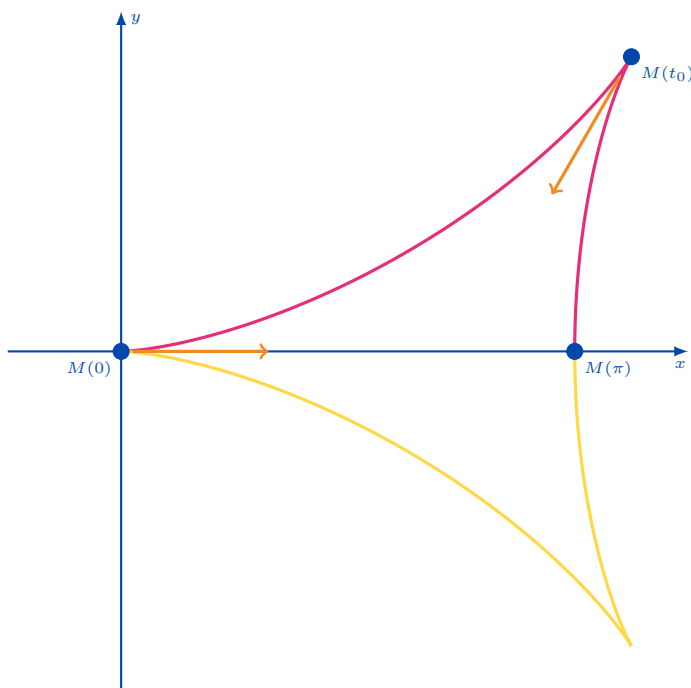
Solution. Voici un tableau donnant les variations conjointes de x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$:

t	0	$2\pi/3$	π		
$x'(t)$	0	+	0	-	0
x	0 $\nearrow$ 9/2 $\searrow$ 4				
y	0 $\nearrow$ $3\sqrt{3}/2$ $\searrow$ 0				
$y'(t)$	0	+	0	-	0

$\square$

6. Tracer dans $\mathcal{P}$ le support de la courbe γ .

Solution. On trace γ_1 avec le tableau de variations ci-dessus et on complète par symétrie d'axe (Ox) . On fait naturellement apparaître les vecteurs tangents aux deux points de rebroussement.



□

7. Montrer que la courbe γ est invariante par la rotation de centre $\Omega(3,0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Solution. La rotation r de centre $\Omega(3,0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ s'exprime de façon simple dans $\mathbb{C}$: l'image par r de tout point d'affixe z est le point d'affixe $z' = z_\Omega + e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_\Omega)$ où $z_\Omega = 3$.

Tout point $M(t)$ de la courbe a pour affixe :

$$z(t) = x(t) + iy(t) = 3 + 2(-\cos t + i \sin t) - e^{2it} = 3 - 2e^{-it} - e^{2it}.$$

L'image de $M(t)$ par la rotation r a donc pour affixe :

$$z'(t) = (z(t) - 3)e^{i\frac{2\pi}{3}} + 3 = -2e^{-it+i\frac{2\pi}{3}} - e^{2it+i\frac{2\pi}{3}} + 3 = 3 - 2e^{-i(t-\frac{2\pi}{3})} - e^{2i(t-\frac{2\pi}{3})} = z\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Ainsi $r(M(t)) = M\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) \in \gamma$, autrement dit $r(\gamma) \subset \gamma$.

Conclusion : la courbe γ est bien invariante par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. □

☞ *Indication* : on pourra exploiter avec profit l'expression d'une telle rotation à l'aide de nombres complexes.

8. (Réservé aux 5/2). Calculer la longueur de la portion de γ lorsque le paramètre t décrit l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Solution. Désignons par L la longueur de γ . La courbe γ étant invariante par la rotation de centre $\Omega(3,0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, on a :

$$L = 3 \int_0^{2\pi/3} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 3 \int_0^{2\pi/3} 4 \left| \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right| dt.$$

Mais, comme $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geq 0$ sur $[0, 2\pi/3]$, on a :

$$L = 3 \int_0^{2\pi/3} 4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) dt = 8 \left[-\cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right]_0^{2\pi/3} = 16.$$

□

Exercice 2

Le but de l'exercice est une introduction à la notion de polynôme minimal d'une matrice.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$, on note $P(A)$ la matrice : $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k$, et on dit que P est un *polynôme annulateur* de A si et seulement si $P(A)$ est la matrice nulle.

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + 2y + z, -x - y, 0)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Solution. Après calculs on trouve $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

b. Calculer M^3 et en déduire un polynôme annulateur de M .

Solution. On trouve sans peine $M^3 = M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $M^3 - M^2 = M^2(M - I_3) = 0$ et donc $P = X^2(X - 1)$ est annulateur de M . □

Dans la suite on note $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble de tous les polynômes annulateurs de A :

$$\mathcal{N}(A) = \{P \in \mathbb{R}[X]; P(A) = \mathbb{O}_n\}$$

où $\mathbb{O}_n$ désigne la matrice nulle de taille n .

2. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un espace vectoriel.

Solution. Par définition, on a $\mathcal{N}(A) \subset \mathbb{R}[X]$. Montrons que $\mathcal{N}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ est le polynôme nul, on a clairement $P(A) = \mathbb{O}_n$ donc $P \in \mathcal{N}(A)$.

Enfin, soient $P, Q \in \mathcal{N}(A)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$[\lambda P + \mu Q](A) = \lambda P(A) + \mu Q(A) = \mathbb{O}_n + \mathbb{O}_n = \mathbb{O}_n$$

ce qui prouve $\lambda P + \mu Q \in \mathcal{N}(A)$. D'où le résultat : $\mathcal{N}(A)$ est un espace vectoriel. □

3. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ contient au moins un polynôme non nul.

☞ *Indication :* On pourra considérer la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution. $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal $(n^2 + 1)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension n^2 : cette famille est donc liée.

Il existe donc des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$ non tous nuls tels que $\sum_{k=0}^{n^2} a_k A^k = \mathbb{O}_n$.

En notant $P = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ on a $P(A) = 0$ et ainsi $P \in \mathcal{N}(A)$, d'où $\mathcal{N}(A) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. □

4. On note p_0 le degré minimal d'un polynôme annulateur non nul, et on considère un polynôme $P_0 \in \mathcal{N}(A)$ de degré p_0 .

a. Justifier que $p_0 \in \mathbb{N}^*$.

Solution. Par définition, $p_0 \in \mathbb{N}$ puisque c'est le degré d'un polynôme non nul.

Soit $P = a$ un polynôme constant non nul. On a alors $P(A) = a I_n \neq 0$ et donc P n'est pas annulateur de A . Ainsi tout polynôme annulateur de A et non nul est de degré au moins 1, et donc $p_0 \geq 1$. On a donc bien $p_0 \in \mathbb{N}^*$. □

b. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est l'ensemble des polynômes divisibles par P_0 (on pourra considérer, pour $P \in \mathcal{N}(A)$, la division euclidienne de P par P_0).

Solution. Soit P un polynôme annulateur de A : la division euclidienne de P par P_0 s'écrit $P = Q P_0 + R$ avec $\deg(R) < p_0$.

On peut donc écrire $P(A) = Q(A) P_0(A) + R(A)$, d'où on déduit $R(A) = 0_n$.

Ainsi R est un polynôme annulateur de A de degré strictement plus petit que p_0 . Par définition de p_0 on en déduit que R est le polynôme nul, puis que $P = Q P_0$, soit que P est divisible par P_0 .

Réciproquement, si $P = Q P_0$ est divisible par P_0 , alors on a $P(A) = Q(A) P_0(A) = 0_n$ et donc P est annulateur de A .

On a donc bien que P est annulateur de A si et seulement si P divisible par P_0 . □

- c. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme de degré p_0 , annulateur de A et de coefficient dominant égal à 1.

Solution. Par définition de p_0 , il existe un polynôme P_0 annulateur de A et de degré p_0 .

Par la Question 4.b., P est un polynôme annulateur de A de degré p_0 si et seulement si P est divisible par P_0 et de degré p_0 , ce qui s'écrit $P = \lambda P_0$ avec λ un réel.

En notant α et α_0 les coefficients dominants respectifs de P et P_0 , on a alors $\alpha = \lambda \alpha_0$.

Avec ces hypothèses, on a $\alpha = 1 \iff \lambda = \frac{1}{\alpha_0}$: il existe une et une seule valeur de λ , et donc un et un seul polynôme P annulateur de A de degré p_0 , tel que le coefficient dominant soit 1.

Il existe un unique polynôme unitaire de degré p_0 , annulateur de A . □

Ce polynôme sera noté π_A et nommé le *polynôme minimal* de A .

5. Montrer que deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.

Solution. Soient A et A' deux matrices semblables, et Q inversible telle que $A' = Q^{-1} A Q$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $A'^k = Q^{-1} A^k Q$, et donc pour tout polynôme P , il vient $P(A') = Q^{-1} P(A) Q$.

M étant inversible, on a alors $P(A) = 0 \iff P(A') = 0_n$, et donc $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A')$: deux matrices semblables ont exactement les mêmes polynômes annulateurs, et par suite le même polynôme minimal.

Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal. □

6. Soit P un polynôme de coefficient dominant 1, et p son degré.

- a. Montrer que $P = \pi_A$ si et seulement si $P \in \mathcal{N}(A)$ et aucun diviseur de P de degré strictement inférieur à p n'est annulateur de A .

Solution. Si $P = \pi_A$ alors par définition P est de degré $p = p_0$ et le seul polynôme de degré strictement inférieur qui est annulateur de A est le polynôme nul, qui n'est pas un diviseur de P : aucun diviseur de P de degré strictement inférieur à p n'est annulateur de A .

Réciproquement, supposons que $P \in \mathcal{N}(A)$, de coefficient dominant 1, est tel qu'aucun diviseur de P de degré strictement inférieur à $p = \deg(P)$ n'est annulateur de A . Puisque $P \in \mathcal{N}(A)$, on a P divisible par π_A et donc π_A n'est pas de degré strictement inférieur à p . On a donc $p = p_0$, et la Question 4.c. montre que P est l'unique polynôme annulateur de A de degré p_0 et de coefficient dominant 1, c'est à dire $P = \pi_A$.

$P = \pi_A \iff P \in \mathcal{N}(A)$ et aucun diviseur de P de degré strictement inférieur à p n'est annulateur de A . □

- b. Dans cette question et dans cette question uniquement, on choisit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme minimal de A .

Solution. On a prouvé à la Question 1. que $P = X^2(X - 1)$ est annulateur de A et de coefficient dominant 1.

Les diviseurs stricts de P sont X , $X - 1$, X^2 et $X(X - 1) = X^2 - X$.

Or $A \neq 0_3$, $A - I_3 \neq 0_3$, $A^2 \neq 0$ et $A^2 - A \neq 0_3$: aucun diviseur strict de P n'est annulateur de A et on en déduit donc que $\pi_A = X^3 - X^2$. □

7. Dans cette question et dans cette question uniquement, on choisit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et on construit la matrice B

à 4 lignes et 9 colonnes de la façon suivante : pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la $i^{\text{ème}}$ ligne s'obtient en écrivant bout à bout les lignes de

la matrice A^{i-1} .

a. Donner les coefficients de la matrice B .

Solution. On a $A^0 = I_3$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 9 \\ 7 & 8 & -7 \\ -2 & 12 & 10 \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 3 & 4 & -3 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & 12 & 9 & 7 & 8 & -7 & -2 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

□

b. À l'aide d'un pivot de Gauss, déterminer le rang de B .

Solution. Les opérations $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{cases}$ puis $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 12L_2 \end{cases}$ et enfin $L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3$ transforment B en la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que $\text{rg}(B) = 3$ car on obtient une matrice échelonnée avec 3 pivots non nuls.

□

c. En déduire que (I_3, A, A^2, A^3) est liée, et écrire une relation de dépendance linéaire entre ces quatre matrices.

Solution. Ces opérations donnent aussi

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(A^3 + I_3) - 12A}_{L_4 + L_1}}_{L_4 - 12L_2} - 5 \underbrace{\underbrace{(A^2 + I_3) - 4A}_{L_3 + L_1}}_{L_3 - 4L_2}}_{L_4 - 5L_3} = 0_3,$$

d'où on tire $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$: donc $P = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ est annulateur de A , de coefficient dominant 1.

□

d. Donner alors π_A .

Solution. Les racines de P sont évidentes : 1 (simple) et 2 (double).

Les diviseurs stricts de P sont ainsi $(X - 1)$, $(X - 2)$, $(X - 1)(X - 2)$ et $(X - 2)^2$.

Or $A - I_3 \neq 0_3$ et $A - 2I_3 \neq 0_3$ de manière évidente, et on vérifie facilement que $(A - I_3)(A - 2I_3)$ et $(A - 2I_3)^2$ sont eux aussi non nuls, ce qui montre que $P = \pi_A$.

□

e. **Application** : Déduire de ce qui précède la matrice A^k pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.

☞ On commencera par calculer le reste dans la division euclidienne de X^k par π_A .

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par π_A s'écrit $X^n = Q\pi_A + R$ avec $\deg(R) < \deg(\pi_A) = 3$, donc $R = aX^2 + bX + c$.

En injectant les valeurs des racines de P dans l'équation de division euclidienne (pour la racine double, on l'injecte aussi dans l'équation obtenue par dérivation de celle-ci), on obtient que (a, b, c) est solution du système

$$(S) : \begin{cases} 1 = a + b + c \\ 2^n = 4a + 2b + c \\ n2^{n-1} = 4a + b \end{cases} \iff \begin{cases} a = (n-2)2^{n-1} + 1 \\ b = (8-3n)2^{n-1} - 4 \\ c = (2n-6)2^{n-1} + 4 \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi, } A^n = R(A) = aA^2 + bA + cI_3 = \begin{pmatrix} (n-4)2^{n-1} + 3 & n2^{n-1} & (6-n)2^{n-1} - 3 \\ 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^n \\ (n-4)2^{n-1} + 2 & n2^{n-1} & (6-n)2^{n-1} - 2 \end{pmatrix}.$$

La formule appliquée à $n = -1$ donne $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, et une vérification immédiate montre que cette matrice est bien A^{-1} : la formule ci-dessus est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}, A^n = \begin{pmatrix} (n-4) 2^{n-1} + 3 & n 2^{n-1} & (6-n) 2^{n-1} - 3 \\ 2^n - 1 & 2^n & 1 - 2^n \\ (n-4) 2^{n-1} + 2 & n 2^{n-1} & (6-n) 2^{n-1} - 2 \end{pmatrix}.$$

□