Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir maison n°4

À rendre le 5/12

Exercice 1

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ d'ordre $n \geq 3$..

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la **série** de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter:pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

- **a.** Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum u_n$ converge.
  On se place désormais sous cette condition.
- **b.** Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

c. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

d. En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

e. Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2?

f. Conjecturer à quel ordre la série $\sum u_n$ converge.

2. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

b. Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

c. En déduire que la série $\sum u_n$ converge à l'ordre 2 , et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}.$$

d. Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p\cdot 3^n}$$

e. La série $\sum R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

a. Montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0.$$

b. Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t,$$

montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

c. En déduire que la série $\sum u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

d. Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t.$$