Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir maison n°4

Solution

Exercice 1

Calculer le déterminant $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ d'ordre $n \geq 3$..

Solution. En développant selon C_1 on obtient directement deux déterminants triangulaires d'ordre $n-1$:

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} \\ &= 1 + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge à l'ordre 1 et on note alors $(R_{1,n})_{n \geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Si à nouveau la **série** de terme général $R_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et on note $(R_{2,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $R_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et on note alors $(R_{p,n})_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$R_{p,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p-1,k}.$$

On peut noter:pour tout $n \in \mathbb{N}, R_{0,n} = u_n$.
Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.

a. Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum u_n$ converge.
On se place désormais sous cette condition.

Solution. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

b. Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Solution. Soit $k \geqslant 2$,
Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a $t \geqslant k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{t^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$
Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}(k+1-k)$$

ou encore

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

De même, pour $t \in [k-1, k]$ on a $t \leqslant k$, d'où, puisque $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{t^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{k^\alpha}$
Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

Finalement on a bien

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

□

c. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Solution. Soit $n \geqslant 1$, on sait que les intégrales $\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont des intégrale de Riemann convergentes. D'après la relation de Chasles, on en déduit que les série $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent et que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

En sommant les relations obtenues à la question précédente, on a alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

□

d. En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Solution. D'après la relation précédente, on a, pour tout $n \geqslant 1$

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leqslant 1.$$

C'est-à-dire

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} \leqslant \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} \leqslant 1.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1} = 1$, ainsi, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{1,n}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} = 1.$$

C'est-à-dire

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

□

e. Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2?

Solution. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $R_{1,n} > 0$ en tant que somme de réels strictement positifs.

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, les séries de terme général respectifs $R_{1,n}$ et $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ sont de même nature.

La série de terme général $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ ou encore si et seulement si $\alpha > 2$.

Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$. □

f. Conjecturer à quel ordre la série $\sum u_n$ converge.

Solution. On a vu que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 1 si et seulement si $\alpha > 1$ et qu'elle à l'ordre 2 si et seulement si $\alpha > 2$.
On conjecture alors qu'elle converge à l'ordre $p \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha > p$.
En d'autres termes, on conjecture que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à tous les ordres p tels que $p < \alpha$. □

2. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = \dfrac{1}{n^n}$.

a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Solution. On applique le critère de d'Alembert (tout est à termes strictement positifs) : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \times \frac{1}{n+1}.$$

Or, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$ (limite classique déjà vue cent fois). Par produit,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

et la série est bien convergente. □

b. Montrer que, pour tout $k \geqslant 3, u_k \leqslant \dfrac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

Solution. Soit $k \geqslant 3$, on a alors $k\ln(k) \geqslant k\ln(3)$, d'où $k^k \geqslant k^3$ et ainsi

$$\forall k \geqslant 3, \qquad 0 \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{3^k}.$$

Les séries de terme général respectifs u_k et $\frac{1}{3^k}$ convergent. En sommant les inégalités obtenus on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+n+1}} \qquad \textit{changement d'indice } i = k-n-1 \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3^{n+1}} \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2.3^n}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2.3^n}.$$

□

c. En déduire que la série $\sum u_n$ converge à l'ordre 2 , et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}.$$

Solution. La série de terme général $\frac{1}{2}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1,1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} R_{1,n}$ converge. En d'autres termes la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2.

De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{1,k} = R_{2,n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{4.3^n}$. Ainsi

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4.3^n}.$$

□

d. Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \cdot 3^n}$$

Solution. On va procéder par récurrence sur p.
Plus précisément notons $\mathcal{A}(p)$ l'assertion :
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \dfrac{1}{2^p.3^n}$.

✗ On a déjà montré que l'assertion est vraie pour $p = 1$ et $p = 2$.

✗ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vraie.
On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^p}\frac{1}{3^n}$ est convergente en tant que série géométrique (multipliée par une constante) de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} R_{p,n}$ converge. En d'autres termes la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre $p+1$.
De plus, en sommant les inégalités on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} = R_{p+1,n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2^p}\frac{1}{2.3^n} = \frac{1}{2^{p+1}3^n}$.
Ainsi,

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p+1,n} \leqslant \frac{1}{2^{p+1}3^n}.$$

Ce qui prouve l'assertion au rang $n+1$ et achève la récurrence.

En conclusion, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et

$$\forall n \geqslant 1, \qquad 0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p.3^n}.$$

□

e. La série $\sum R_{n,n}$ converge-t-elle ?

Solution. D'après la question précédente on a, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \dfrac{1}{2^n 3^n}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant R_{n,n} \leqslant \frac{1}{6^n}.$$

La série de terme général $\frac{1}{6^n}$ est convergente en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{6} \in]-1, 1[$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge. □

3. On considère, **dans cette question uniquement**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

a. Montrer que:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0.$$

Solution. Pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geqslant 1$ ainsi

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n.$$

D'où, par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

□

b. Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k \mathrm{d}t,$$

montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Solution. Soit $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

□

c. En déduire que la série $\sum u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Solution. On sait, d'après la Question **3.a.** que la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ainsi, d'après la question **3.b.** la suite $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

En d'autres termes la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
R_{1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall n \geqslant 0, \qquad R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

□

d. Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int\limits_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t.$$

Solution. Pour $p \geqslant 1$, on définit l'assertion $\mathcal{A}(p)$:

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_p$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 0$, $R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t$

- ✗ La question précédente nous assure que l'assertion $\mathcal{A}(1)$ est vérifiée.
- ✗ Soit $p \geqslant 1$, on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(p)$ est vérifiée.
  Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_{p,k} &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^{k+p}}{1+t)^p}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-t)^{k+p}}{(1+t)^p}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p} \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^p}\,\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}} - \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^p}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+p} \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

  Pour $t \in [0,1]$ on a $1+t \geqslant 1$ ainsi $(1+t)^p \geqslant 1$ et donc

$$\forall t \in [0,1], \qquad 0 \leqslant \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}} \leqslant t^{n+1+p}.$$

Par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+p+2}.$$

Le théorème des gendarmes nous assure alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t = 0$.

On en déduit donc que la série de terme général $R_{p,k}$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} = \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{(1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
R_{p+1,n} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_{p,k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} R_{p,k} - \sum_{k=0}^{n} R_{p,k} \\
&= \int_0^1 \frac{t^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^1 \frac{(-t)^p}{1+t)^p+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre $p+1$ et que, pour tout $n \geqslant 0$, $R_{p+1,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t$.
En d'autres termes on a prouvé l'assertion $\mathcal{A}(p+1)$.

Par principe de récurrence, on en conclut alors que, pour tout entier p, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge à l'ordre p et, pour tout $n \geqslant 0$, $R_{p,n} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{1+t)^{p+1}}\,\mathrm{d}t$. $\square$