Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir maison n°5

À rendre le 07/01

Exercice 1

1. Développer $f(x) = (x+1)\ln(1+x)$ en série entière, et préciser le rayon de convergence de la série obtenue.

2. En déduire $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n(n-1)}$.

Exercice 2

On considère le système différentiel linéaire

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & + & 2y & - & 2z \\ y' & = & -4x & - & 3y & + & 4z \\ z' & = & -2x & & & + & z \end{array} \right.$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ainsi, X est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : X est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si $X' = AX$.
2. Déterminer le spectre de A et montrer que A n'est pas diagonalisable.
3. Trigonaliser A.
On déterminera une matrice P inversible et une matrice T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$ avec T de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont les valeurs propres de A rangées par ordre décroissant.

4. On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

5. a. Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : \varphi' = \varphi$.
b. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : \varphi' = -\varphi$.
c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $(E_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.
d. Soit Y tel que $Y' = TY$. Déterminer l'expression des composantes de Y.

6. En déduire que les solutions générales de $(\mathcal{S})$, sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} x(t) = \left(\lambda_2 t + \lambda_3 - \dfrac{1}{2}\lambda_2\right) e^{-t} \\ y(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{-t} \\ z(t) = (\lambda_2 t + \lambda_3)e^{-t} + \lambda_1 e^t \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des réels.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On prélève au hasard ces n boules une par une et sans remise (afin de vider l'urne).
À la suite de cette expérience, on note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, u_i le numéro de la boule obtenue au cours du $i-$ème tirage.
Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a un record au $i-$ème tirage si

$$u_i > \max\{u_1, \dots, u_{i-1}\},$$

autrement dit, si la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement supérieurs aux numéros des boules tirées précédemment. D'autre part, on convient qu'il y a systématiquement un record à l'instant 1.

Pour tout $(i, k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, n]\!]$, on introduit les événements :

- ✗ R_i : "il y a un record au $i-$ème tirage"
- ✗ $B_{i,k}$: "la boule obtenue $i-$ème tirage est numérotée k"
- ✗ $A_{i,k}$: "la boule obtenue au $i-$ème tirage porte un numéro strictement inférieur à k"

Par convention, on a donc $P(R_1) = 1$.

Exemple. *Si $n = 8$ et que l'on obtient, dans cet ordre, les boules numérotés ②①③⑤④⑥⑧⑦, alors il y a un record aux tirages 1,3,4,6 et 7. Ainsi les événements*

$$R_1,\ R_3\ , R_4\ , R_6\ , R_7\ , B_{1,2}\ , B_{2,1}\ , B_{3,3}\ , A_{3,6}\ , A_{5,6},$$

notamment (ce ne sont pas les seuls), sont réalisés.

On modélise l'expérience par l'ensemble Ω des $n-$uplets de numéros de boules piochées, dont les composantes sont donc deux à deux distinctes et on considère P l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

1. Quel est le cardinal de Ω?

2. Combien y a-t-il de tirages de n boules successivement sans remise dont la dernière boule est celle numérotée n?
En déduire que $P(R_n) = \dfrac{1}{n}$.

3. Soit $i \in [\![2, n]\!]$.

a. Que vaut $P(R_i \cap B_{i,k})$ lorsque $k \in [\![1, i-1]\!]$?

b. Justifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $R_i \cap B_{i,k} = \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_{j,k}\right) \cap B_{i,k}$.

c. Soit $j \in [\![1, i-2]\!]$. Sachant que l'on a déjà pioché j boules avec un numéro strictement inférieur à k, combien en reste-t-il ? Et combien reste-t-il de boules au total ?

En déduire que

$$P(R_i \cap B_{i,k}) = \frac{\frac{(k-1)!}{(k-i)!}}{\frac{n!}{(n-i)!}}.$$

d. Montrer alors que

$$P(R_i) = \frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}.$$

e. Justifier que

$$\sum_{k=i+1}^{n} \left(\binom{k}{i} - \binom{k-1}{i}\right) = \binom{n}{i} - 1.$$

f. En déduire enfin que $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$.

On vient donc de montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(R_i) = \dfrac{1}{i}$: il y a une chance sur i qu'il y ait un record au $i-$ème tirage.

Dans la suite, nous allons nous intéresser à la *variable aléatoire* X_n qui compte le nombre de records, c'est à dire que X_n est une application :

$$X_n : \Omega \to \mathbb{R}.$$

L'évènement $[X_n = k]$ est réalisé si et seulement si il y a exactement k records.

4. Quel est l'ensemble des valeurs que prend X_n, noté $X_n(\Omega)$, et appelé *univers image*?

5. Justifier que $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n}$.

6. **a**. Écrire l'événement $[X_n = n]$ en fonction des événements de la famille $(B_{i,k})_{1 \leq i,k \leq n}$.
b. En déduire $P(X_n = n)$.

7. Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, notons E_i l'événement "les $i-1$ premiers tirages amènent des boules dont le numéro est strictement inférieur à n et la première boule tirée porte le plus grand numéro d'entre eux".

a. Justifier à l'aide d'arguments combinatoires que

$$P(E_i) = \frac{\binom{n-1}{i-1} \times (i-2)!}{\frac{n!}{(n-i+1)!}}$$

et en déduire que $P(E_i) = \dfrac{n-i+1}{n(i-1)}$.

b. Justifier alors que

$$[X_n = 2] = \bigcup_{i=2}^{n} [E_i \cap B_{i,n}].$$

c. En déduire que

$$P(X_n = 2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

En général, on essaie de déterminer complètement la loi d'une variable aléatoire, c'est à dire qu'il faudrait déterminer, pour tout $k \in X_n(\Omega)$, la probabilité $P(X_n = k)$. Ici, on l'a fait pour trois valeurs. Le sujet n'en demande pas plus.