Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir maison n°6

À rendre le 30/01

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = (1-x)^\alpha$.

1. Rappeler le développement en série entière de f. On précisera son rayon de convergence.

2. Soit x un réel de $]0;1[$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Soit p un réel fixé de $]0;1[$.
On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad P(Y_n = -1) = 1-p.$$

On dit qu'une telle variable suit la loi de *Rademacher* de paramètre p.

3. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

On introduit ensuite une suite (X_n) de variables aléatoires définie comme suit : $\left\{\begin{array}{ll} X_0 & = 0 \\ X_{n+1} & = X_n + Y_n \end{array}\right.$

4. Simulation sous `Python`.

a. Écrire une fonction d'en-tête `def Rademacher(p):` qui renvoie une simulation de la loi de Rademacher de paramètre p.

b. Écrire alors une fonction d'en-tête `def simul_traj_X(n,p):` qui renvoie la liste de toutes les valeurs (aléatoires) successives $[X_0, X_1, \ldots X_n]$.

5. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

a. Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad X_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$

6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0, \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

7. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p \neq \dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

b. À l'aide de la Question **2.**, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} p_{2n}$ converge et préciser sa somme.

On **admet** la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$

8. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p = \dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que $p_{2n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n \to +\infty$.

b. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} p_{2n}$ diverge.

9. On **admet** le théorème suivant:

> **Théorème .** **Lemme de Borel-Cantelli**
>
> *Soit (A_n) une suite d'évènements.*
> *Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.*

a. Que permet alors de conclure le résultat montré à la Question **7.b.** ?

b. Soit $p \neq \dfrac{1}{2}$. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires W_n et W_∞ définies par

$$W_n = \max\{k \leq n : \ X_k = 0\}, \qquad W_\infty = \max\{k \in \mathbb{N} : \ X_k = 0\}.$$

i. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_W(n,p):` qui renvoie une simulation de W_n.

ii. En déduire ensuite l'écriture d'une fonction `def est_E_W(n,p):` qui calcule et renvoie une *estimation* de $E(W_n)$, c'est à dire une valeur approchée de $E(W_n)$. On citera le résultat du cours qui justifie la démarche.

iii. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite $([W_n \leq t])_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

iv. Montrer que $[W_\infty \leq t] = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} [W_n \leq t]$.

v. Déduire des deux questions précédentes que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n \to +\infty} P(W_n \leq t) = P(W_\infty \leq t).$$

On dit que (W_n) converge en loi vers W_∞.

10. Le but de cette question est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli admis-ci dessus.
On considère donc une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge.
On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $B_{n+1} \subset B_n$. On pose $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

b. Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

$$(*) \quad \omega \in B \quad \Longleftrightarrow \quad (**) \quad \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

c. Montrer que $P(B_n) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

d. Justifier que $P(B) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(B_n)$. Conclure que $P(B) = 0$.