Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir maison n°6

Solution

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = (1-x)^{\alpha}$.

1. Rappeler le développement en série entière de f. On précisera son rayon de convergence.

Solution. D'après le cours, f est développable en série entière de rayon de convergence $R = 1$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = (1-(-x))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(-1)^n x^n.$$

□

2. Soit x un réel de $]0;1[$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Solution. Il suffit d'utiliser le DSE ci-dessus de f avec $\alpha = -1/2$. En effet, pour ce choix de α, on a

$$\begin{aligned}
(-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} &= (-1)^n \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-i\right)}{n!} \\
&= (-1)^n \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{-1-2i}{2}\right)}{n!} = \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)}{2^n n!} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)}{2^n n!} \times \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(2i)} = \frac{(2n)!}{4^n n! n!} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n},
\end{aligned}$$

ce qui donne bien la formule attendue. □

Soit p un réel fixé de $]0;1[$.
On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad P(Y_n = -1) = 1 - p.$$

On dit qu'une telle variable suit la loi de *Rademacher* de paramètre p.

3. Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

Solution. Sans la moindre difficulté

$$E(Y_n) = (-1)(1-p) + p = 2p-1, \quad E(Y_n^2) = (-1)^2(1-p) + p = 1, \quad V(Y_n) = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p).$$

□

On introduit ensuite une suite (X_n) de variables aléatoires définie comme suit : $\left\{ \begin{array}{ll} X_0 & = 0 \\ X_{n+1} & = X_n + Y_n \end{array} \right.$

4. Simulation sous `Python`.

a. Écrire une fonction d'en-tête `def Rademacher(p):` qui renvoie une simulation de la loi de Rademacher de paramètre p.

Solution. On s'inspire de la façon de simuler une *Bernoulli* à partir d'une loi uniforme.

```
def Rademacher(p):
    if rd.random() <p :
        return 1
    return -1
```

On propose deux versions alternatives :

```
def Rademacher_bis(p):
    r=rd.binomial(1,p)
    if r==0 :
        return -1
    return r

def Rademacher_ter(p):
    return 2*rd.binomial(1,p)-1
```

□

b. Écrire alors une fonction d'en-tête `def simul_traj_X(n,p):` qui renvoie la liste de toutes les valeurs (aléatoires) successives $[X_0, X_1, ...X_n]$.

Solution. Tout ceci s'écrit sans difficulté en suivant la définition avec une petite boucle `for` en utilisant la fonction `Rademacher` ci-dessus.

```
def simul_traj_X(n,p):
    X=[0]
    for k in range(1, n+1):
        X.append(X[k-1]+Rademacher(p))
    return X
```

□

5. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

a. Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).

Solution. $[Y_n = 1]$ est réalisé si et seulement si $[Z_n = 1]$ l'est, et $[Y_n = -1]$ est réalisé si et seulement si c'est $[Z_n = 0]$ qui est réalisé. On reconnait une loi de Bernoulli de paramètre p.

□

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

Solution. Les variables Y_k sont mutuellement indépendantes. Par le lemme des coalitions il en est de même pour les variables Z_k. Et le cours nous dit que la somme de Bernoulli indépendantes de même paramètre est une binomiale. On peut donc affirmer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \sim \mathcal{B}(n,p).$$

□

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad X_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$

Solution. Observant que

$$X_{k+1} - X_n = Y_k = 2Z_k - 1,$$

un télescopage donne

$$X_n = X_n - X_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(X_{k+1} - X_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(2Z_k - 1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$$

□

6. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0, \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

Solution. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Ainsi, p_n est donc la probabilité d'être de retour, à l'instant n, au point de départ 0.
On a alors

$$p_{2n+1} = P(X_{2n+1} = 0) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n+1} Z_k = 2n+1\right) = 0$$

car les variables Z_k prennent leur valeurs dans $\{0;1\}$ et donc nécessairement $2\sum_{k=0}^{2n+1} Z_k$ prend une valeur paire.

En revanche,

$$p_{2n} = P(X_{2n=0}) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = 2n\right) = P\left(\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

car on sait que $\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k \sim \mathcal{B}(2n, p)$. □

7. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p \neq \frac{1}{2}$.

a. Montrer que $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

Solution. C'est une question classique. On étudie la fonction $\psi\ :\ x \mapsto x(1-x)$ sur $]0;1[$. Cette fonction est polynomiale donc dérivable. Sa dérivée vaut $\psi'(x) = 1 - 2x$ et ψ est donc maximale en $x = 1/2$ et le maximum vaut $\psi(1/2) = 1/4$ et il n'est atteint que pour $p = 1/2$. Ainsi, on a bien, pour tout $p \in]0;1[\setminus\{1/2\}$ que

$$p(1-p) < \frac{1}{4}.$$

□

b. À l'aide de la Question **2.**, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ converge et préciser sa somme.

Solution. La question précédente permet d'affirmer en particulier que $4p(1-p) < 1$. On peut donc utiliser la formule de la Question **2.** avec $x = 4p(1-p) \in]-1,1[$ pour obtenir la convergence de la série considérée et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{(4p(1-p))^n}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

□

On **admet** la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$

8. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p = \frac{1}{2}$.

a. Montrer que $p_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n \to +\infty$.

Solution. Par définition des coefficients binomiaux et avec la formule de Stirling admise ci-dessus, pour $n \to +\infty$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{(2n)}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}\right)^2} = \frac{2^{2n}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}n}.$$

Ceci donne tout de suite

$$p_{2n} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

□

b. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ diverge.

Solution. On sait que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (par critère de Riemann). Ainsi, par critère d'équivalence (pour les séries à termes positifs - qu'on peut appliquer car p_{2n} est une quantité positive : c'est une probabilité), on peut conclure que la série $\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ diverge.

Remarque. On est au bord du disque de convergence, il était nécessaire d'utiliser cet argument ici car on ne peut pas prédire le comportement si $|x| = R$. □

9. On **admet** le théorème suivant:

Théorème . **Lemme de Borel-Cantelli**

Soit (A_n) une suite d'évènements.
Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.

a. Que permet alors de conclure le résultat montré à la Question **7.b.** ?

Solution. On applique ce lemme à la suite d'évènement $A_n = [X_n = 0]$, dans le cas de $p \neq 1/2$. On sait que $p_{2n+1} = 0$ et que la série $\sum p_{2n}$ converge (on a noté $p_n = P(A_n)$ donc la série $\sum P(A_n)$ converge et la probabilité qu'une infinité des A_n se réalisent simultanément est nulle, c'est à dire que la probabilité de revenir à l'état initial 0 pour X_n une infinité de fois est nulle.

Remarque. On revient donc presque sûrement un nombre fini de fois, et donc il est naturel de s'intéresser au *dernier* retour. □

b. Soit $p \neq \frac{1}{2}$. On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, les variables aléatoires W_n et W_∞ définies par

$$W_n = \max\{k \leq n : \ X_k = 0\}, \qquad W_\infty = \max\{k \in \mathbb{N} : \ X_k = 0\}.$$

i. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simul_W(n,p):` qui renvoie une simulation de W_n.

Solution. Sans difficulté, on renvoie la valeur du dernier indice pour lequel $[X_k = 0]$.

```
def simul_W(n,p):
    X=simul_traj_X(n,p)
    w=0
    for k in range(n+1):
        if X[k]==0 :
            w=k
    return w
```

□

ii. En déduire ensuite l'écriture d'une fonction `def est_E_W(n,p):` qui calcule et renvoie une *estimation* de $E(W_n)$, c'est à dire une valeur approchée de $E(W_n)$. On citera le résultat du cours qui justifie la démarche.

Solution. Une *estimation* (ou valeur approchée) de l'espérance est donnée par la moyenne empirique d'un échantillon (de grande taille. Ici on prend 1000). Cette approche est justifiée par la loi faible des grands nombres.

```
def est_E_W(n,p):
    sample=[simul_W(n,p) for k in range(1000)]
    return np.mean(sample)
```

□

iii. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite $([W_n \leq t])_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.

Solution. Soit $\omega \in \Omega$. Commençons par observer que

$$\{k \leq n : [X_k = 0]\} \subset \{k \leq n+1 : [X_k = 0]\}.$$

Lorsque deux ensembles sont inclus l'un dans l'autre, le maximum du premier ensemble est nécessairement inférieur ou égal à celui de l'autre: on a plus de valeurs à disposition et potentiellement des valeurs supérieures. Ainsi,

$$W_n(\omega) \leq W_{n+1}(\omega).$$

Il suit que si $\omega \in [W_{n+1} \leq t]$ alors, par transitivité $\omega \in [W_n \leq t]$ et la suite d'évènements $([W_n \leq t])$ est bien décroissante au sens de l'inclusion. □

iv. Montrer que $[W_\infty \leq t] = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty}[W_n \leq t]$.

Solution. Montrons cette égalité d'ensembles par double inclusion.

- ✗ Supposons que $\omega \in [W_\infty \leq t]$. Soit $j \in \mathbb{N}$. Par le même argument que ci-avant, $W_j(\omega) \leq W_\infty(\omega) \leq t$. Donc $\omega \in [W_j \leq t]$. Ceci étant vrai pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a bien l'inclusion

$$[W_\infty \leq t] \subset \bigcap_{j=0}^{+\infty}[W_j \leq t].$$

- ✗ Réciproquement, supposons que $\omega \in \bigcap_{j=0}^{+\infty}[W_j \leq t]$. Si $\omega \notin [W_\infty \leq t]$, cela veut dire (par définition du max) qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_0 = \max\{j \in \mathbb{N} : [X_j(\omega) = 0]\} > t$ et donc $\omega \notin [W_{k_0} \leq t]$, ce qui est contradictoire. On a bien l'inclusion dans l'autre sens. Au final, on peut conclure que

$$[W_\infty \leq t] = \bigcap_{j=0}^{+\infty}[W_j \leq t]$$

□

v. Déduire des deux questions précédentes que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(W_n \leq t) = P(W_\infty \leq t).$$

On dit que (W_n) converge en loi vers W_∞.

Solution. D'après ce qui précède, et par théorème de limite monotone pour une suite décroissante d'évènements

$$\lim_{n\to+\infty} P(W_n \leq t) = P\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty}[W_j \leq t]\right) = P(W_\infty \leq t),$$

ce qui est ce qu'on demandait et qui est, *à titre informatif* la définition du fait que (W_n) converge en loi vers W_∞. □

10. Le but de cette question est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli admis-ci dessus.
On considère donc une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge.
On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $B_{n+1} \subset B_n$. On pose $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

Solution. On observe que

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = A_n \cup B_{n+1}$$

donc on a bien $B_{n+1} \subset B_n$, c'est à dire que la suite d'évènements (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion. On pose $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. □

b. Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

$$(*) \quad \omega \in B \iff (**) \quad \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

Solution. Soit $\omega \in \Omega$. On montre l'équivalence souhaitée par double implication:

- ✗ Sens direct. Si $\omega \in B$, alors, pour tout $n \geq 1$, on a $\omega \in B_n$ (c'est la définition de l'intersection). Et par définition de B_n et de la réunion, il existe donc $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. Donc, on peut trouver un k arbitrairement grand tel que $\omega \in A_k$, c'est à dire que ω est bien dans une infinité de A_k.

- ✗ Implication réciproque. Supposons que ω soit dans une infinité de A_k. Si $\omega \notin B$, alors alors il existe un $n \geq 1$, tel que $\omega \notin B_n$. Mais alors, pour tout $k \geq n$, on a $\omega \notin A_k$. Ce qui veut dire que ω peut au mieux appartenir à A_1, ..., A_{n-1}, c'est à dire à un nombre fini d'évènements A_k, ce qui est une contraction.

□

c. Montrer que $P(B_n) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

Solution. On sait que si C et D sont deux évènements, alors $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \leq P(C) + P(D)$. Une récurrence immédiate permet de voir que la probabilité d'une somme d'évènements reste inférieure ou égale à la somme des probabilités de ces évènements et on a

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{N} P(A_k)$$

mais la suite d'évènements $\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right)_N$ est croissante au sens de l'inclusion et, par limite monotone

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = P(B_n).$$

On a donc bien, en passant à la limite ($N \to +\infty$) que $P(B_n) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$. □

d. Justifier que $P(B) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(B_n)$. Conclure que $P(B) = 0$.

Solution. Comme la série de terme général $P(A_n)$ est supposée convergente, son reste tend vers 0, ou encore

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, par limite monotone qu'on peut appliquer car la suite (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion,

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 0$$

par théorème des gendarmes. Comme on a montré qu'appartenir à B était équivalent à être dans une infinité de A_k, on a bien montré que la probabilité d'être dans une infinité de A_k était nulle

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0.$$

□