Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir surveillé n°1

Vendredi 13 Septembre
Solution

Ce devoir comporte cinq exercices indépendants.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Écrire sous forme développée P_1 et P_2 et donner leur factorisation dans $\mathbb{C}[X]$.

Solution. On peut développer avec la formule du binôme et factoriser en utilisant une différence de carrés.

- ✗ Pour $n = 1$,

$$P_1 = (X+1)^2 - 1 = ((X+1)+1)((X+1)-1) = X(X+2) = X^2 + 2X.$$

- ✗ Pour $n = 2$,

$$\begin{aligned} P_2 &= (X+1)^4 - 1 = ((X+1)^2+1)((X+1)^2-1) \\ &= ((X+1)-i)((X+1)+i)P_1 = (X+1-i)(X+1+i)X(X+2) \\ &= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X \end{aligned}$$

□

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $P_n = XQ_n$, où Q_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe que $P_n(0) = 1^{2n} - 1 = 0$ donc 0 est racine de P_n et X divise P_n ce qui permet d'écrire $P_n = XQ_n$ où Q_n est un polynôme de degré $\deg(P_n) - 1 = 2n - 1$.
En effet, P_n est un polynôme de degré $2n$, ce qu'on obtient immédiatement par la formule du binôme. De plus, P_n est unitaire (son coefficient de plus haut degré est égal à 1) et par factorisation par X, il en est de même pour Q_n.
Le terme constant de Q_n est le terme de degré 1 de P_n. Par la formule du binôme, ce coefficient vaut $\binom{2n}{1} = 2n$. □

3. Montrer que P_n n'admet que des racines simples.

Solution. Soit a une racine de P_n. On a alors $(a+1)^{2n} = 1$. En particulier, $a + 1 \neq 0$. Mais $P_n' = 2n(X+1)^{2n-1}$. Ainsi

$$P_n'(a) = 2n(a+1)^{2n-1} = \frac{2n}{a+1}(a+1)^{2n} = \frac{2n}{a+1} \neq 0.$$

donc a n'est pas racine double de P_n qui n'a donc que des racines simples. □

4. Déterminer les racines complexes de P_n (on les mettra sous forme exponentielle).

Solution. Notant $\mathbb{U}_{2n}$ l'ensemble des racines $2n-$ème de l'unité :

$$\begin{aligned} z \text{ racine de } P_n \iff P_n(z) = 0 &\iff (z+1)^{2n} = 1 \\ &\iff z+1 \in \mathbb{U}_{2n} \\ &\iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!],\ z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} \\ &\iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!],\ z = -1 + e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\frac{ik\pi}{2n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{2n}} - e^{-\frac{ik\pi}{2n}} \right) \\ &\iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!], z = 2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{\frac{ik\pi}{2n}} = 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} \end{aligned}$$

En conclusion, notant $\mathcal{Z}_{P_n}$ l'ensemble des racines de P_n, on a

$$\mathcal{Z}_{P_n} = \left\{ 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} \ :\ k \in [\![0, 2n-1]\!] \right\}.$$

□

5. Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, puis $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Solution. Observons que, notant $\mathcal{Z}_{Q_n}$ l'ensemble des racines de Q_n, on a

$$\mathcal{Z}_{Q_n} = \mathcal{Z}_{P_n} \setminus \{0\} = \left\{ 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} \ :\ k \in [\![1, 2n-1]\!] \right\}.$$

D'après les relations coefficients/racines et les coefficients de Q_n obtenus à la Question **2.**, on a

$$\prod_{k=1}^{2n-1} 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} = (-1)^{2n-1} 2n = -2n.$$

Comme, par ailleurs

$$\prod_{k=1}^{2n-1} 2e^{\frac{i(k+n)\pi}{2n}} = (2i)^{2n-1} \prod_{k=1}^{2n-1} e^{\frac{ik\pi}{2n}} = (2i)^{2n-1} e^{\frac{i\pi}{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n-1} k} = (2i)^{2n-1} e^{\frac{(2n-1)i\pi}{2}} = (-2)^{2n-1}.$$

Au final, on peut écrire

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n-1} (-2n) = \frac{n}{2^{2n-2}}.$$

Pour se ramener au produit de la "moitié" des termes, il faut observer que, pour $k = n$, on a

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

et donc

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

Mais alors, on voit aussi que

$$\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right) = \sin\left(\pi - \frac{k\pi}{2n}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

et donc le second produit contient exactement les mêmes termes que le premier. Il suit que

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \right)^2$$

ou encore

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} = \sqrt{\frac{n}{2^{2n-2}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

□

Exercice 2

On considère, dans cet exercice, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. a. En étudiant les variations de la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t)=\ln(1+t)-t+\dfrac{t^2}{4}$, montrer:

$$\forall t\in[0,1],\ \ln(1+t)\leqslant t-\frac{t^2}{4}.$$

Solution. La fonction g est dérivable sur $[0,1]$, comme somme, différence et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $t\in[0,1]$, on a $g'(t)=\dfrac{1}{t+1}-1+\dfrac{t}{2}=\dfrac{\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}}{1+t}=\dfrac{t(t-1)}{2(1+t)}\leqslant 0.$
On en déduit que g est décroissante sur $[0,1]$, et comme $g(0)=0$, on en déduit $\forall t\in[0,1],\ g(t)\leqslant 0$. D'où le résultat:

$$\forall t\in[0,1],\ \ln(1+t)\leqslant t-\frac{t^2}{4}.$$

□

b. En déduire : $\forall n\geqslant 1,\ \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant \exp\left(1-\dfrac{1}{4n}\right)$.

Solution. Soit $n\geqslant 1$. On commence par prendre $t=\dfrac{1}{n}$ dans l'égalité ci-dessus, à partir de quoi on peut écrire:

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2} &\Rightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1-\frac{1}{4n}\\ &\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant 1-\frac{1}{4n}\\ &\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\exp\left(1-\frac{1}{4n}\right)\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n\geqslant 1,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\exp\left(1-\frac{1}{4n}\right).$$

□

2. a. Montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\exp\left(-\dfrac{1}{4n}\right)$.

Solution. Soit $n\geqslant 1$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}n!}{(n+1)!n^ne^{-n}}=\frac{(n+1)^n}{n^n}e^{-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1},$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{-1}.$$

On déduit alors directement le résultat, en multipliant l'inégalité de la question précédente par e^{-1}, ce qui donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\exp\left(-\frac{1}{4n}\right).$$

□

b. En considérant le produit $p_n=\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}$, montrer que, pour tout entier $n\geqslant 1$: $u_n\leqslant\exp\left(-1-\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)$.

Solution. D'une part, on remarque que le produit considéré est téléscopique:

$$p_n=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{\prod_{k=1}^{n-1}u_{k+1}}{\prod_{k=1}^{n-1}u_k}=\frac{\prod_{k=2}^{n}u_k}{\prod_{k=1}^{n-1}u_k}=\frac{u_n}{u_1}=e\cdot u_n.$$

D'autre part, en utilisant la question précédente, on peut écrire:

$$p_n \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{1}{4k}\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k}\right) = \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right).$$

On en déduit $e \cdot u_n \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)$, d'où le résultat :

$$u_n \leqslant \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right).$$

□

3. a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Solution. Soit $n \geqslant 1$. La relation de Chasles donne déjà $\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante, on a $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où par croissance de l'intégrale:

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

Il suffit alors de sommer cette dernière inégalité pour k allant de 1 à $n-1$ pour obtenir

$$\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

On a donc

$$\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

□

b. En déduire : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\ln(n)\right)$.

Solution. On remarque déjà $\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln t]_1^n = \ln(n)$. En utilisant la question précédente, on peut alors écrire:

$$\ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \;\Rightarrow\; -1 - \frac{1}{4}\ln(n) \geqslant -1 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \;\Rightarrow\; \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\ln(n)\right) \geqslant \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right).$$

La Question **2.b.** donne alors

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\ln(n)\right).$$

□

c. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Solution. Observant que tous les termes de la suite sont clairement positifs, on a finalement obtenu :

$$\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\ln n\right).$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème des gendarmes pour conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

□

Exercice 3

On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour $n\in\mathbb{N}^*$, par $S_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i}$.

1. a. Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$.

Solution. D'après la définition de S_n, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{1}\binom{2}{1+i}=\binom{2}{1}+\binom{2}{2}\\ &= 2+1=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{2}\binom{4}{2+i}=\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\\ &= 6+4+1=11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=0}^{3}\binom{6}{3+i}=\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}\\ &= 20+15+6+1=42. \end{aligned}$$

□

b. Écrire $\binom{2n}{n+i}$ comme un quotient de produits.

Solution. Par définition,

$$\binom{2n}{n+i}=\frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!}=\frac{\displaystyle\prod_{j=n-i+1}^{2n} j}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n+i} j}.$$

□

2. Informatique.

a. Écrire, en `Python`, une fonction récursive `produit_des_termes` qui prend en argument une liste `L` et renvoie le produit des termes de la liste.

Solution. On s'inspire de la fonction récursive vue en cours qui permet de calculer la somme des termes d'une liste. Si la liste est vide, on renvoie 1, sinon on renvoie le premier terme multiplié par la fonction appliqué au reste des termes de la suite.

```python
def produit_des_termes(L):
    if len(L) == 0 :
        return 1
    return L[0]*produit_des_termes(L[1:])
```

□

b. En déduire une fonction `suite_S` qui prend en argument un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et renvoie la valeur de S_n.

Solution. La formule du coefficient binomial ci-avant et la fonction écrite à la question ci-dessus nous permettent d'écrire le programme demandé.

```python
def suite_S(n):
  y=0
  for i in range(n):
    L1=[k for k in range(n-i+1,2*n+1)]
    L2=[k for k in range(1,n+i+1)]
    y=y+produit_des_termes(L1)/produit_des_termes(L2)
  return y
```

□

3. Justifier que
$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}=2^{2n}.$$

Solution. D'après la formule du binôme de Newton, on a
$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}=\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}1^i1^{2n-i}=(1+1)^{2n}=2^{2n}.$$
□

4. En déduire que
$$S_n=2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$
On commencera par montrer que
$$\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}+\binom{2n}{n}=2S_n.$$

Solution. Par définition,
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i}=\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j} && \text{(d'une part)}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n+i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n-i} && \text{(par symétrie)}\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n-i}=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{j} \end{aligned}$$
On a donc
$$2S_n=S_n+S_n=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{j}+\sum_{j=n}^{2n}\binom{2n}{j}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}+\binom{2n}{n}.$$
Ceci permet, avec la question précédente,
$$2S_n=2^{2n}+\binom{2n}{n},$$
ce qui donne bien, en divisant par 2,
$$S_n=2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$
□

5. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_p=\binom{2p}{p}2^{-2p}$.

a. Montrer que, pour tout entier $p\in\mathbb{N}^*$, $u_{p+1}=\dfrac{2p+1}{2p+2}u_p$.

Solution. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Alors
$$\begin{aligned} \frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{\binom{2(p+1)}{p+1}2^{-2(p+1)}}{\binom{2p}{p}2^{-2p}}\\ &= \frac{[2(p+1)]!p!p!}{2^2(p+1)!(p+1)!(2p)!}\\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)}\\ &= \frac{2p+1}{2p+2}, \end{aligned}$$
ce qu'on voulait. □

b. En déduire, par récurrence, que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,
$$0\leqslant u_p\leqslant\frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

Solution. On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

✗ initialisation. Pour $p = 1$, on a

$$0 \leqslant u_1 = \binom{2}{1} 2^{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

car $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{4} = 2$.

✗ hérédité. Supposons que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

Alors, d'après la question précédente

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2} u_p \leqslant \frac{2p+1}{2p+2} \frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}} \\ &\leqslant \sqrt{\frac{2p+1}{(2p+2)^2}}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{2p+1}{(2p+2)^2} \leqslant \frac{1}{2p+3} &\iff (2p+1)(2p+3) \leqslant (2p+2)^2 \\ &\iff 4p^2 + 8p + 3 \leqslant 4p^2 + 8p + 4 \\ &\iff 3 \leqslant 4, \end{aligned}$$

ce qui est vrai. On a donc la majoration voulue et la récurrence est terminée.

□

c. En déduire alors la limite de u_p lorsque $p \to +\infty$.

Solution. Par théorème des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = 0.$$

□

Exercice 4

Cet exercice est extrait du sujet C, Banque PT - 2020.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les fonctions h, continues en 0, telles que $h(0) = 1$ et qui vérifient, pour tout réel x,

$$h(2x) = h(x) \cos(\pi x).$$

1. Pour tout réel a, exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et de $\sin(a)$.

Solution. D'après les formules de duplication connues sur le bout des doigts,

$$\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a).$$

□

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

Solution. On procède donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

✗ initialisation. Pour $n=1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la formule de duplication rappelée à la question précédente,

$$2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\left(2\frac{\pi x}{2}\right) = \sin(\pi x),$$

ce qui est bien la formule au rang $n=1$.

✗ hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) &= 2\cos\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right)2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \\
&= \sin\left(2\times\frac{\pi x}{2^{n+1}}\right)2^n\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \text{par formule de duplication} \\
&= 2^n\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \\
&= \sin(\pi x) && \text{par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

On a bien obtenu la formule au rang $n+1$ ce qui termine cette récurrence.

□

3. Montrer que, pour toute solution h, tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Solution. Soit h une fonction solution. On procède à nouveau par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour montrer que

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

✗ initialisation. Pour $n=1$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$h\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = h\left(2\times\frac{\pi x}{2}\right) = h(x),$$

par hypothèse sur h. On a bien la formule au rang $n=1$.

✗ hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout réel x :

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) &= h\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2^{k+1}}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \\
&= h\left(2\times\frac{\pi x}{2^k}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) && \text{par hypothèse sur } h \\
&= h\left(\frac{x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) \\
&= h(x) && \text{par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

On a bien obtenu la formule au rang $n+1$ ce qui termine cette récurrence.

□

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, et pour tout réel x :

$$h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x)$$

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. En combinant les deux questions précédentes
$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x) &= \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right) 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right)\\ &= h(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right),\end{aligned}$$
ce qu'on voulait. □

5. Pour tout réel x non nul, déterminer les valeurs de
$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}.$$

Solution. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ et que, par hypothèse h est continue en 0 avec $h(0) = 1$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right) = h\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{2^n}\right) = h(0) = 1.$$
De plus, on sait que $\sin(\theta) \sim \theta, \theta \to 0$. Comme $\theta = \frac{\pi x}{2^n} \to 0,\ n \to +\infty$, on peut écrire
$$\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \sim \frac{\pi x}{2^n}, \qquad n \to +\infty.$$
Ainsi,
$$\frac{1}{2^n}\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)} \sim \frac{x}{2^n}\times\frac{2^n}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}.$$
□

6. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x, de $h(x)$ en fonction de x.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La relation obtenue à la Question **4.** se réécrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \neq 0$,
$$h(x) = \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin(\pi x) \times \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}$$
E faisant tendre n vers l'infini (ce qu'on peut faire car la relation est vraie pour une infiniuté de valeurs de n), on obtient
$$h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$
Comme, on sait que $h(0) = 1$, on a donc nécessairement
$$h(x) = \begin{cases}\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{si } x \neq 0\\ 1, & \text{si } x = 0\end{cases},$$
ce qui est bien une fonction continue partout sur $\mathbb{R}$ et notamment en 0.
Ce n'était pas demandé mais on aurait pu vérifier que cette fonction là était bien solution du problème, ce qui est le cas et c'est donc la seule. □

Exercice 5 ($*$)

On *rappelle* qu'une fonction f est dite **convexe** sur un intervalle I si pour tous $x_1, x_2 \in I$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in [0; 1]$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on a
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

On admet dans la suite que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

1. L'objet de cette première question est de montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

i. f est convexe sur I ;
ii. Pour tout entier $n \geqslant 2$, f vérifie la condition (C_n) :
Pour tous $x_1, ..., x_n \in I$, pour tous $\lambda_1, ..., \lambda_n \in [0; 1]$ tels que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, on a
$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_n f(x_n).$$

a. Montrer que : si, pour tout entier $n \geqslant 2$, f vérifie la condition (C_n), alors f est convexe.

Solution. Si f vérifie la condition (C_n) pour tout $n \geqslant 2$ alors f vérifie la condition (C_2) qui est la définition même de convexité. □

b. Montrer l'implication réciproque par **récurrence** sur $n \geqslant 2$.
Pour l'hérédité, on pourra, en partant des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$, introduire les coefficients $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$.

Solution. On procède donc par récurrence sur $n \geqslant 2$.

✗ initialisation. Pour $n = 2$, c'est la définition de convexité; comme f est supposée convexe, la condition (C_2) est bien vérifiée.

✗ hérédité. On suppose que la propriété est vraie pour un certain $n \geqslant 2$. On considère alors un $(n+1)$−uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1})$ de $[0; 1]$ vérifiant $\lambda_1 + ... + \lambda_{n+1} = 1$ et un $(n+1)$−uplet $(x_1, ..., x_{n+1})$ d'éléments de I. On va utiliser une première fois l'inégalité de convexité que l'on connait (pour deux nombres) puis dans un deuxième temps l'inégalité pour n supposée vraie par (HR).

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right)\\
&= f\left((1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\mu_i x_i + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right)\\
&\leqslant (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \qquad \text{(inégalité de conv. pour } n=2\text{)}\\
&\leqslant (1-\lambda_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \qquad \text{(par HR)}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i),
\end{aligned}$$

et la récurrence est terminée.

□

2. Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ...b_n$ des réels strictement positifs.

a. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}.$$

*On pourra utiliser la Question **1.** avec $x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ et des coefficients λ_i bien choisis.*

Solution. Soient donc n un entier supérieur ou égal à 2, $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ...b_n$ des réels strictement positifs. Afin de trouver la valeur de λ_i à laquelle appliquer l'inégalité de convexité, raisonnons un peu par analyse-synthèse. La présence de carrés suggère l'utilisation de la fonction carrée, admise comme étant convexe.
En prenant $x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$ (ce qui est licite car les b_i sont strictement positifs), l'inégalité de convexité appliquée à la fonction $x \mapsto x^2$ (qu'on a admis être convexe) nous donne

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \frac{a_i}{b_i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i \frac{a_i^2}{b_i^2}.$$

Afin d'obtenir ce qu'on veut, on voit que le choix de poser $\lambda_i = \dfrac{b_i^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$ vérifie bien $\lambda_i \geqslant 0$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} = 1$$

et on a bien

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$$

ou encore, en faisant passer le dénominateur de gauche à droite

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

puis enfin, en prenant la racine car tout est positif

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)},$$

ce qui est bien l'inégalité demandée et qui porte le nom d'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

□

b. Que devient l'inégalité si les réels $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ sont simplement supposés positifs ?

Solution. La question est en fait la validité de cette inégalité si (au moins) un des coefficients a_i ou b_i est nul. Auquel cas le terme de gauche est nul, et il est bien inférieur au terme de droite qui est toujours positif ou nul. L'inégalité s'étend donc à des coefficients simplement supposés positifs. □

3. Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ des réels positifs. Déduire de l'inégalité obtenue à la question précédente, que

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} \leqslant \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,j}a_{i,k}}.$$

Solution. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz obtenue ci-dessus avec

$$a_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \geqslant 0, \qquad \text{et} \qquad b_i = 1.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)\\
&\leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)^2\right)}\\
&= \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right)}\\
&= \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,j}a_{i,k}},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'inégalité demandée. □

4. **Application**. Soient m et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère n points du plan $M_1, ..., M_n$ deux à deux distincts et m droites $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_m$ deux à deux distinctes. On s'intéresse au nombre I d'incidences, c'est à dire au nombre de couples (i,j) dans $[\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$ tels que $M_i \in \mathcal{D}_j$.
Pour ce faire, on introduit les coefficients $a_{i,j}$ définis par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], \qquad a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } M_i \in \mathcal{D}_j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Justifier que, pour tous j, k tels que $j \neq k$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} \leqslant 1$.

Solution. Soit (j, k) un couple d'entiers distincts. Un produit de nombres égaux à 0 ou 1 vaut 1 ou 0 et il vaut 1 si et seulement si chacun des termes déjà égal à 1. Mais

$$a_{i,j}a_{i,k} = 1 \iff a_{i,j} = 1 \text{ et } a_{i,j} = 1 \iff M_i \in \mathcal{D}_j \text{ et } M_i \in \mathcal{D}_k.$$

La somme étudiée correspond alors au nombre d'indice i tel que $M_i \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k$.
Les droites $\mathcal{D}_j$ et $\mathcal{D}_k$ étant distinctes, elles ont, au plus, un seul point d'intersection. Donc, il y a au plus un seul indice i tel que $M_i \in \mathcal{D}_j \cap \mathcal{D}_k$. On a bien

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} \leqslant 1.$$

□

b. En déduire que

$$I \leqslant \sqrt{nm^2 + mn^2}.$$

Solution. Le nombre d'incidences I cherché est égal à la somme $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j}$. On va appliquer la question précédente.

Attention, dans celle-ci, on avait considéré des couples (j, k) d'entiers distincts : il faut donc découper la somme en deux en sortant, à j fixé, l'indice k égal à j :

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} \\
&\leqslant \sqrt{n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{i,j}a_{i,k}} = \sqrt{n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k}} \\
&\leqslant \sqrt{n\left(\sum_{\substack{1\leqslant j,k\leqslant m \\ k\neq j}} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)} \\
&\leqslant \sqrt{n\left(\sum_{\substack{1\leqslant j,k\leqslant m \\ k\neq j}} 1 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} 1\right)} \\
&\leqslant \sqrt{n\left(m^2 - m + nm\right)} \\
&\leqslant \sqrt{nm^2 + n^2m},
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité attendue et conclut ce chouette exercice. □