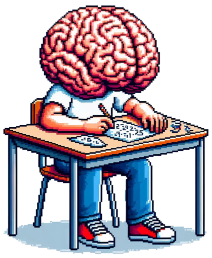
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Devoir surveillé n°2

Vendredi 4 Octobre
Durée : 4 heures

Ce devoir comporte quatre exercices, tous indépendants.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. **a**. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
c. Achever l'étude des variations de f, dresser son tableau de variations incluant ses limites (justifiées) aux infinis.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \,]0;1[$.
b. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Calculer, pour $x \in]0,1]$, $g''(x)$. Montrer que g réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
On admettra que $f'\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) < 1$.
c. En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

3. **a**. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
b. Montrer par récurrence qu'il existe une suite de polynômes (P_n), telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x).$$

On précisera les expressions de P_1 et P_2 ainsi que la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n.
c. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, , $P_n(0) = 2^n$.
d. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.
e. Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

4. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Que remarque-t-on ?

Exercice 2

1. Montrer que, pour tous réels a et b,
$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b).$$

2. Pour $x \in]-1,1[$, réécrire l'expression $\sin(\arccos(x))$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit les fonctions f_n et g_n définies par
$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \frac{\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n et U_n les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui coïncident avec les fonctions f_n et g_n sur $]-1,1[$:
$$\forall x \in]-1,1[, \ T_n(x) = f_n(x), \qquad \text{et} \qquad U_n(x) = g_n(x).$$

4. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

5. Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(-\cos(\theta))$. En déduire, avec un raisonnement scrupuleux, que T_n a la même parité que n. Que peut-on dire de ses coefficients ?

6. Déterminer, en distinguant selon la parité de n, la valeur du coefficient constant de T_n.

7. Montrer que la suite (T_n) vérifie la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}.$$

8. Déduire des questions précédentes que, $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx)$.

9. Déduire de la **Question 4.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est solution de l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel non nul, étudie les solutions sur $\mathbb{R}_*^+$de l'équation :
$$(E_n) : \ln(x) + x = n.$$
On définit la fonction $f : x \longmapsto \ln(x) + x$, définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une solution et une seule notée x_n.

2. Donner la valeur de x_1.

3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est strictement croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

4. **a**. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) < x$.
b. Prouver que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
c. Prouver qu'il existe un réel α tel que $x_n = o(n^\alpha)$, $n \to +\infty$.

5. Écrire une fonction `Python` nommée `suite_x(n)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

6. À l'aide du résultat de la Question **4.b.**, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$.
En déduire que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

7. On pose, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n = \dfrac{n - x_n}{\ln(n)}$.

a. Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$. En déduire la limite de (u_n).

b. Prouver alors successivement :

$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n); \quad \text{puis} \quad \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} - 1; \quad \text{puis} \quad u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}.$$

8. En déduire que :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right), \quad n \to +\infty.$$

Exercice 4

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixés, on pose

$$\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \ A^k M = A^{k-1} M\}.$$

1. **a**. Montrer que Γ_k est un espace vectoriel.

b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a: $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

2. On suppose dans cette question, et dans cette question uniquement, $n = 3$ et que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $\Gamma_1 = \{0\}$.

b. Déterminer une famille génératrice puis une base et la dimension de Γ_2 puis de Γ_3.

3. **a**. Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

b. Étudier la réciproque.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dim(\Gamma_k)$.

a. Montrer que la suite (u_k) converge puis qu'il existe un unique entier p tel que

$$\forall k < p, \ u_k < u_{k+1} \quad \text{et} \quad \forall k \geq p, \ u_k = u_p.$$

b. (Réservé aux 5/2) Montrer que, si A est diagonalisable et non inversible, alors $p = 2$.