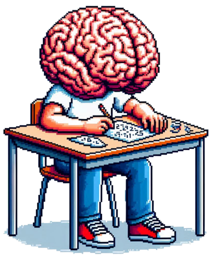
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Devoir surveillé n°2

Vendredi 4 Octobre
Solution

Ce devoir comporte quatre exercices, tous indépendants.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, f est composée de fonctions usuelles (exponentielle et inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas) continues (et même de classe $\mathcal{C}^1$) donc elle même continue. Le problème est au point de raccordement. Observons que, pour $x \neq 0$,

$$-\frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

et par composition avec l'exponentielle dont la limite en $-\infty$ vaut 0, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$. $\square$

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Comme mentionné ci-avant f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée. Par théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on peut donc affirmer que f est finalement de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$) et que $f'(0) = 0$. $\square$

c. Achever l'étude des variations de f, dresser son tableau de variations incluant ses limites (justifiées) aux infinis.

Solution. Observons que f est paire. On a $-\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par composition avec l'exponentielle $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et la limite est la même en $-\infty$ par parité. Le signe de la dérivée s'obtient aussi de manière immédiate, ce qui permet de dresser le tableau de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

□

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in\ ]0;1[$.

Solution. On procède par récurrence. Commençons par observer que, d'après l'étude de f ci-avant, $f(\mathbb{R}) = [0;1[$ et on peut même préciser que, comme f est continue et strictement croissante sur $]0,1[$, f réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]0, f(1)[=]0, e^{-1}[$. De plus, f ne s'annule qu'en 0.

✗ initialisation. Pour $n = 1$, on a $u_1 = f(3) = e^{-1/9} \in]0,1[$ donc la propriété est vraie au rang 1.
✗ hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_n \in]0;1[$. Montrons qu'alors $u_{n+1} \in]0,1[$. En effet,

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f(]0,1[) \subset]0,1[$$

d'après les remarques qui précèdent. La récurrence est terminée.

□

b. Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Calculer $g''(x)$. Montrer que g réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

On admettra que $f'\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) < 1$.

Solution. La fonction g est dérivable deux fois sur $]0,1]$ comme somme de deux telles fonctions (on a déjà dit que f était $\mathcal{C}^1$ mais en fait elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ pour les mêmes raisons que celles évoquées). On a, pour tout $x \in]0,1]$,

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 1, \quad \text{puis} \quad g''(x) = f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme, $f'\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) < 1$, il suit que, pour tout $x \in]0,1]$, $g'(x) < 0$. On a alors les tableaux de variations en cascade suivants

x	0		$\sqrt{2/3}$		1
$g''(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
g'	-1	$\nearrow$	$g'(\sqrt{2/3}) < 0$	$\searrow$	$g'(1)$
$g'(x)$			$-$		
g	0		$\searrow$		$e^{-1} - 1$

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$, elle réalise donc (par le théorème de la bijection monotone) une bijection de $[0;1]$ sur $[e^{-1} - 1, 0]$. □

c. En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante et qu'elle converge. Déterminer sa limite.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n \in]0,1[$, alors $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$ et la suite (u_n) est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$. Étant minorée par 0, elle est donc convergence vers une certaine limite $\ell \geqslant 0$ par théorème de convergence monotone. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en ℓ), la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ donne, par passage à la limite $\ell = f(\ell)$ ou encore $g(\ell) = 0$. De l'étude qui précède, le seul antécédent de 0 par g est 0 et donc $\ell = 0$. La suite (u_n) converge donc vers 0. □

3. a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Solution. Mêmes arguments que précédemment : on cite les théorèmes généraux (composées de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$). Ce n'est pas là qu'est le problème... □

b. Montrer par récurrence qu'il existe une suite de polynômes (P_n), telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x).$$

On précisera les expressions de P_1 et P_2 ainsi que la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n.

Solution. On procède donc comme suggéré par récurrence.

✗ <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^0}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{P_0(x)}{x^0}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

où on a posé $P_0 = 1$, ce qui permet donc d'initialiser la propriété.

✗ <u>hérédité.</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons qu'il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Alors, comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}$ est dérivable et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \times \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{P_n'(x)x^{3n} - 3nx^{3n-1}P_n(x)}{x^{6n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{P_n'(x)x^3 - 3nx^2P_n(x) + 2P_n}{x^{3n+3}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{P_n'(x)x^3 + (2-3nx^2)P_n(x)}{x^{3n+3}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\
&= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right),
\end{aligned}$$

où on a posé $P_{n+1} = X^3P_n' + (2-3nX^2)P_n$ qui est bien un polynôme. La récurrence est terminée.

□

c. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, , $P_n(0) = 2^n$.

Solution. C'est encore une récurrence...

✗ <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a $P_0(0) = 1 = 2^0$ et c'est vérifié.

✗ <u>hérédité.</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n(0) = 2^n$. Alors

$$P_{n+1}(2) = 0^3P_n'(0) + (2 - 3n \times 0^2)P_n(0) = 2P_n(0) \underset{\text{H.R}}{=} 2 \times 2^n = 2^{n+1},$$

ce qui est bien le résultat attendu et termine la récurrence.

□

d. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Solution. Soit $n \in *$. On a

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}f(x) = P_n(x) \times \frac{1}{x^{3n}}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée et algèbre des limites car $P_n(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2^n$. □

e. Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Il suffit de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en 0, c'est à dire de montrer que f est de classe $\mathcal{C}^n$ en 0 et ce, pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est (encore) une récurrence. Il n'est en revanche pas nécessaire de l'initialiser car on a déjà montré en début d'exercice que f était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que $f^{(n+1)}(x) \to 0, x \to 0$ par ce qui précède, le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ appliqué à $f^{(n)}$ nous assure que $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 (et donc sur $\mathbb{R}$) et f est bien de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. La récurrence est terminée. □

4. Écrire le développement limité de f en 0 à l'ordre n, pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Que remarque-t-on ?

Solution. Par la formule de Taylor-Young, f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = o(x^n)$$

car toutes les dérivées successives de f sont nulles en 0.
On obtient alors une fonction dont la partie principale du développement limité à tout ordre est nulle. Pourtant f n'est pas identiquement nulle. □

Exercice 2

1. Montrer que, pour tous réels a et b,

$$\text{ch}(a+b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b).$$

Solution. Il est plus facile de partir du membre de droite! Soient a, b deux réels.

$$\begin{aligned}
\text{ch}(a)\text{ch}(b) + \text{sh}(a)\text{sh}(b) &= \frac{1}{4}\left(\left(e^a + e^{-a}\right)\left(e^b + e^{-b}\right) + \left(e^a - e^{-a}\right)\left(e^b e^{-b}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-a-b} - e^{-a+b} - e^{a-b} + e^{-a-b}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^{a+b} + 2e^{-a-b}\right) = \text{ch}(a+b),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. □

2. Pour $x \in]-1, 1[$, réécrire l'expression $\sin(\arccos(x))$.

Solution. Soit $x \in]-1, 1[$. Comme $\arccos(x) \in]0, \pi[$, $\sin(\arccos(x)) > 0$ et

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{\sin^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

□

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit les fonctions f_n et g_n définies par

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad f_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \qquad \text{et} \qquad g_n(x) = \frac{\sin(n \arccos(x))}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.

Solution. On procède comme demandé par récurrence.
✗ initialisation. Pour $n = 0$ et $x \in]-1, 1[$, on observe que

$$f_0(x) = \cos(0) = 1, \qquad \text{et} \qquad g_0(x) = \frac{\sin(0)}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

Les fonctions f_0 et g_0 sont bien (constantes donc) polynomiales.
✗ hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f_n et g_n soient polynomiales. Soit $x \in]-1, 1[$. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) = \cos(n \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \sin(n \arccos(x)) \sin(\arccos(x)) \\
&= x f_n(x) - (1 - x^2) g_n(x)
\end{aligned}$$

et, par hypothèse de récurrence, f_{n+1} est donc différence de produits de fonctions polynomiales, donc polynomiale elle-même. De même,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(\arccos(x))\cos(n\arccos(x)) + \sin(n\arccos(x))\cos(\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2} f_n(x) + x\sin(n\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= f_n(x) + x g_n(x), \end{aligned}$$

et encore une fois, comme par HR f_n et g_n sont polynomiales, il en est de même pour g_{n+1}, ce qui termine la récurrence.

□

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n et U_n les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui coïncident avec les fonctions f_n et g_n sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ T_n(x) = f_n(x), \quad \text{et} \quad U_n(x) = g_n(x).$$

3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in]0,\pi[$. Comme $\cos(\theta) \in]-1,1[$,

$$T_n(\cos(\theta)) = f_n(\cos(\theta) = \cos(n\arccos(\cos(\theta))) = \cos(n\theta)).$$

Les fonctions T_n et cos étant continues, l'égalité se prolonge à $[0,\pi]$. Par parité de la fonction cos, l'égalité se prolonge à $[-\pi,\pi]$: si $\theta \in [-\pi,0]$, alors $-\theta \in [0,\pi]$ et

$$T_n(\cos(\theta)) = T_n(\cos(-\theta)) = \cos(-n\theta)) = \cos(n\theta)).$$

Enfin, on étend l'égalité à $\mathbb{R}$ par $2\pi-$périodicité. □

4. Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(-\cos(\theta))$. En déduire, avec un raisonnement scrupuleux, que T_n a la même parité que n. Que peut-on dire de ses coefficients ?

Solution. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$T_n(-\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta+\pi)) = \cos(n\theta + n\pi)) = \cos(n\theta)\cos(n\pi) = (-1)^n\cos(n\theta) = (-1)^n T_n(\cos(\theta))$$

ce qui permet de dire que, pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. Une égalité en polynômes vraie sur un intervalle est vraie partout (car le polynôme différence a une infinité de racines et est donc identiquement nul). Ainsi, T_n a la même parité que n. En particulier, si n est pair, tous les coefficients des monômes de degrés impairs sont nuls et si n est impair, tous les coefficients des monômes de degrés pairs sont nuls. □

5. Déterminer, en distinguant selon la parité de n, la valeur du coefficient constant de T_n.

Solution. Le coefficient constant de T_n est nul si n est impair, d'après la question précédente. Si $n = 2k$ est pair, alors le coefficient contant de T_n vaut $T_n(0) = \cos\left(2k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$. □

6. Montrer que la suite (T_n) vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} + T_n = 2XT_{n+1}.$$

Solution. Soit $x \in [-1,1]$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) + T_n(x) &= T_{n+2}(\cos(\theta)) + T_n(\cos(\theta)) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin((n+1)\theta) + \cos((n+1-1)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin((n+1)\theta) + \sin(\theta)\sin((n+1)\theta) + \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) \\ &= 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) = 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2xT_n(x) \end{aligned}$$

L'égalité entre polynômes est donc vraie sur un intervalle; pour la même raison que précédemment elle est vraie partout. □

7. Déduire des questions précédentes que, $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_n(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(nx)$.

Solution. Ici c'est une récurrence (double). Commençons par mentionner que, d'après la **Question 3.**, $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ (ce sont les résultats pour f_0 et f_1 qui coïncident avec T_0 et T_1 sur $]-1,1[$ et donc les formules sont vraies partout).

✗ <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(\mathrm{ch}(x)) = 1 = \mathrm{ch}(0)$ et $T_1(\mathrm{ch}(x)) = \mathrm{ch}(x)$ donc c'est vérifié.

✗ <u>hérédité.</u> Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, la propriété soit vraie au rang n et au rang $n+1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule obtenue à la **Question 1.** à l'envi,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\mathrm{ch}(x)) &= 2\mathrm{ch}(x)T_{n+1}(\mathrm{ch}(x)) - T_n(\mathrm{ch}(x)) \\ &\underset{H.R}{=} 2\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}((n+1)x) - \mathrm{ch}(nx) \\ &= \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}((n+1)x) + \mathrm{ch}((n+2)x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}((n+1)x) - \mathrm{ch}(nx) \\ &= \mathrm{ch}((n+2)x) + \mathrm{ch}(nx) - \mathrm{ch}(nx) \\ &= \mathrm{ch}((n+2)x), \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

□

8. Déduire de la **Question 4.** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

On peut donc dériver deux fois (par rapport à θ) pour obtenir

$$-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$

puis

$$\sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos(\theta))$$

ou encore

$$(1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos(\theta))$$

Ceci étant vrai pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a donc, pour tout $x \in [-1,1]$,

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$$

L'égalité (polynomiale) s'étend une fois de plus à $\mathbb{R}$ car elle est vraie sur un intervalle. T_n est bien solution de l'équation différentielle considérée. □

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel non nul, étudie les solutions sur $\mathbb{R}_*^+$de l'équation :

$$(E_n) : \ln(x) + x = n.$$

On définit la fonction $f : x \longmapsto \ln(x) + x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une solution et une seule notée x_n.

Solution. Il s'agit de montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ admet un unique antécédent par f sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour ce faire, on va utiliser le théorème de la bijection monotone après avoir (brièvement étudié f).
Notons que f est différence de fonctions usuelles continues, dérivables (et tout ce qu'on veut) sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle même dérivable. Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$, ce qui donne le tableau de variations suivant (en remarquant que $f(x) \sim x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ et $f(x) \sim \ln(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Ainsi, f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ admet un unique antécédent par f, noté x_n sur $\mathbb{R}_+^*$. □

2. Donner la valeur de x_1.

Solution. Par définition, x_1 est l'unique antécédent de 1 par f. On voit tout de suite que $f(1) = \ln(1) + 1 = 1$ donc $x_1 = 1$. C'est cadeau. □

3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est strictement croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Solution. Le théorème de la bijection monotone précédemment utilisé nous dit que la bijection réciproque f^{-1} est également strictement croissante (de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$), comme par définition

$$f(x_n) = n \iff x_n = f^{-1}(n)$$

on voit tout de suite que $n < n+1 \Longrightarrow x_n = f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) = x_{n+1}$ donc la suite est croissante et de plus

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty.$$

□

4. **a**. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) < x$.

Solution. On peut démontrer cette inégalité classique en étudiant les variations de la fonction auxiliaire $x \mapsto \ln(x) - x$ (son maximum sur $\mathbb{R}_+^*$, atteint en $x = 1$, est strictement négatif ou utiliser un argument de convexité : la fonction ln est concave, sa courbe est au dessous de toutes ses tangentes, notamment celle en 1 d'équation $y = x - 1$. Donc, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1 < x$. □

b. Prouver que l'on a: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par stricte croissance de f^{-1} l'encadrement demandé est équivalente à

$$f\left(\frac{n}{2}\right) \leqslant f(x_n) = n \leqslant f(n).$$

Or, $f(n) = n + \ln(n) \geqslant n$ car $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\ln(n) \geqslant 0$.
D'autre part, $f\left(\frac{n}{2}\right) = \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2} < \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ d'après l'inégalité démontrée à la question précédente. On a bien l'encadrement voulu. □

c. Prouver qu'il existe un réel α tel que $x_n = o\left(n^\alpha\right),\ n \to +\infty$.

Solution. On utilise l'encadrement précédent. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n}{2} \leqslant x_n \leqslant n \Longrightarrow \frac{1}{2n^{\alpha-1}} \leqslant \frac{x_n}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Il suffit de choisir n'importe quel réel $\alpha > 1$ de sorte que $n^{\alpha-1} \to +\infty$ pour appliquer le théorème des gendarmes et conclure que

$$\frac{x_n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ou encore $x_n = o(n^\alpha), n \to +\infty$. □

5. Écrire une fonction `Python` nommée `suite_x(n)` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-3} près obtenue par la méthode de dichotomie.

Solution. Sans difficulté. On évalue à chaque étape f au milieu c de l'intervalle de recherche ; si $f(c) < n$ on cherche à droite, si $f(c) > n$, on cherche à gauche. On commence avec un intervalle de recherche $[n/2, n]$ car on sait que x_n s'y trouve.

```python
from math import *

def suite_x(n) :
    a=n/2
    b=n
    c=(a+b)/2
    while b-a >= 10**(-3):
        if math.log(c) < n :
            a=c
        else :
            b=c
        c=(a+b)/2
    return c
```

□

6. À l'aide du résultat de la Question **4.b.**, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{n} = 0$.
En déduire que : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la Question **4.b.** et par croissance de ln

$$\frac{\ln(n)-\ln(2)}{n} \leqslant \frac{\ln(x_n)}{n} \leqslant \frac{\ln(n)}{n}$$

puis, par croissance comparée et théorème des gendarmes, $\dfrac{\ln(x_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui s'écrit aussi $\ln(x_n) = o(n)$, $n \to +\infty$.
On revient alors à la définition de x_n : $x_n + \ln(x_n) = n$ ou encore

$$x_n = n - \ln(x_n) = n + o(n),\ n \to +\infty$$

ce qui donne bien $x_n \sim n$. □

7. On pose, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, $u_n = \dfrac{n-x_n}{\ln(n)}$.

a. Montrer que : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![,\ u_n - 1 = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$. En déduire la limite de (u_n).

Solution. Soit $n \geqslant 2$. Par définition, $u_n - 1 = \dfrac{n - x_n - \ln(n)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(x_n)-\ln(n)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$, ce qu'on voulait.
Comme $x_n \sim n$, $x_n/n \to 1$ et par algèbre des limites, $u_n - 1 \to 0$ ou encore $u_n \to 1$. □

b. Prouver alors successivement :

$$\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n); \quad \text{puis} \quad \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} - 1; \quad \text{puis} \quad u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}.$$

Solution. Comme $x_n + \ln(x_n) = n$, on peut aussi écrire $u_n = \dfrac{\ln(x_n)}{\ln(n)}$. La limite trouvée à la question précédente donne alors le premier équivalent : $\ln(x_n) \sim \ln(n)$.
Par ailleurs, on a déjà mentionné que $x_n \sim n$. On peut utiliser les équivalents usuels : $\ln(1+u) \sim u$, $u \to 0$. En posant $u = \frac{x_n}{n} - 1 \to 0$, on a alors

$$\ln\left(\frac{x_n}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{x_n}{n} - 1\right) \sim \frac{x_n}{n} - 1,\ n \to +\infty.$$

Enfin,

$$u_n - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)} \sim \frac{\frac{x_n}{n}-1}{\ln(n)} = \frac{-\ln(x_n)}{n\ln(n)} \sim \frac{-\ln(n)}{n\ln(n)} = -\frac{1}{n},$$

ce qu'on voulait. □

8. En déduire que :

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right), \quad n \to +\infty$$

Solution. Du dernier équivalent obtenu, on peut déduire, pour $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
u_n - 1 &= -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\Rightarrow \quad \frac{n-x_n}{\ln(n)} &= u_n = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\Rightarrow \quad n - x_n &= \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\
\Rightarrow \quad x_n &= n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est bien le développement asymptotique demandé et conclut cet exercice.o □

Exercice 4

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixés, on pose
$$\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \ A^k M = A^{k-1} M\}.$$

1. a. Montrer que Γ_k est un espace vectoriel.

Solution. On montre que Γ_k est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on suit les deux étapes du cours.

- ✗ Γ_k contient le vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, notant 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a
$$A^k \cdot 0_n = 0_n = A^{k-1} \cdot 0_n,$$
donc $0_n \in \Gamma_k$.

- ✗ Γ_k est stable par combinaison linéaire. Soient $M, N \in \Gamma_k$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$$A^k (\lambda M + \mu N) = \lambda A^k M + \mu A^k N = \lambda A^{k-1} M + \mu A^{k-1} N = A^{k-1}(\lambda M + \mu N)$$
et $\lambda M + \mu N \in \Gamma_k$ qui est bien stable par combinaison linéaire.

Ainsi, Γ_k est un espace vectoriel. □

b. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a: $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

Solution. Soit $M \in \Gamma_k$. Ainsi, $A^k M = A^{k-1} M$. Mais alors,
$$A^{k+1} M = A \cdot A^k M = A \cdot A^{k-1} M = A^k M,$$
et $M \in \Gamma_{k+1}$. La matrice M étant choisie arbitraire dans Γ_k, on a bien l'inclusion $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$. □

2. On suppose dans cette question, et dans cette question uniquement, $n = 3$ et que
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $\Gamma_1 = \{0\}$.

Solution. Pour cette question, on résout explicitement l'équation caractérisant l'appartenance à Γ_1.
$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad AM = M \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u & v & w \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & u \\ u & = & a \\ a & = & 0 \\ y & = & v \\ v & = & b \\ b & = & 0 \\ z & = & w \\ w & = & c \\ c & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow M = 0_3.$$

Ainsi, on a bien $\Gamma_1 = \{0\}$. □

b. Déterminer une famille génératrice puis une base et la dimension de Γ_2 puis de Γ_3.

Solution. On procède de la même façon pour Γ_2.

$$\begin{aligned}
M=\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\a&b&c\end{pmatrix}\in\Gamma_2 &\iff A^2M=AM\\
&\iff \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\a&b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\a&b&c\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&v&w\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix}\\
&\iff M=\begin{pmatrix}x&y&z\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En notant $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a donc

$$\Gamma_2=\mathrm{Vect}(E_{1,1},E_{1,2},E_{1,3}).$$

La famille de ces trois matrices est alors génératrice de Γ_2 et clairement libre (c'est une sous-famille d'une base donc une famille libre); c'est donc une base de Γ_2 qui est alors de dimension 2.
C'est *quasiment* la même chose qu'à la question précédente. En remarquant que $A^3=0_3$,

$$\begin{aligned}
M=\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\a&b&c\end{pmatrix}\in\Gamma_3 &\iff A^3M=A^2M\\
&\iff \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\a&b&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\a&b&c\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3\\
&\iff M=\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\0&0&0\end{pmatrix}=xE_{1,1}+yE_{1,2}+zE_{1,3}+uE_{2,1}+vE_{2,2}+wE_{2,3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Gamma_3=\mathrm{Vect}(E_{1,1};E_{1,2};E_{1,3};E_{2,1};E_{2,2};E_{2,3})$$

et la famille génératrice obtenue est encore libre (pour la même raison que précédemment), c'est une base de Γ_3 qui est donc de dimension 6. □

3. a. Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1=\Gamma_2$.

Solution. On sait déjà qu'on a toujours $\Gamma_1\subset\Gamma_2$. Il suffit donc simplement de montrer l'inclusion réciproque. Soit $M\in\Gamma_2$. Montrons que $M\in\Gamma_1$.

$$A^2M=AM\Longrightarrow A^{-1}\cdot A^2M=A^{-1}\cdot AM\iff AM=M\iff M\in\Gamma_1.$$

On a bien la conclusion voulue. □

b. Étudier la réciproque.

Solution. Supposons donc que $\Gamma_1=\Gamma_2$.
Si A n'est pas inversible, on a $\mathrm{Ker}(A)\neq\{0\}$. On peut donc trouver $X\in\mathrm{Ker}(A)$, $X\neq 0$, qui vérifie donc $AX=0$. Soit alors M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont identiques et égales à X. Chaque colonne de AM sera donc égale à AX donc à 0, donc $AM=0$ donc $A^2M=0=AM$ et $M\in\Gamma_2$.
Comme $AM=0\neq M$, on a $M\notin\Gamma_1$ ce qui est impossible car $\Gamma_1=\Gamma_2$ par hypothèse. Donc, nécessairement A est inversible et la réciproque est vraie. □

4. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_k=\dim(\Gamma_k)$.

a. Montrer que la suite (u_k) converge puis qu'il existe un unique entier p tel que

$$\forall k<p,\ u_k<u_{k+1}\quad\text{et}\quad\forall k\geqslant p,\ u_k=u_p.$$

Solution. Comme $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$, il suit que
$$u_k = \dim(\Gamma_k) \leqslant \dim(\Gamma_{k+1}) = u_{k+1},$$
et la suite est croissante.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_k \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc
$$u_k = \dim(\Gamma_k) \leqslant \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2.$$
Par convergence monotone, (u_k) converge vers une certaine limite ℓ, avec $\ell \in [0; n^2]$. La suite (u_k) est convergente. Mais c'est une suite d'entiers. Il est facile de voir qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire; à partir d'un moment, tous les termes sont égaux à la limite qui est elle-même un nombre entier (sinon on ne peut pas être arbitrairement proche de celle-ci). Le caractère stationnaire de la suite se traduit par l'existence d'un rang p à partir duquel tous les termes sont égaux, *i.e.*
$$\forall k \geqslant p, \qquad u_k = u_p.$$
En choisissant p comme le plus petit des entiers vérifiant cette propriété, on a aussi
$$\forall k < p,\ u_k < u_{k+1}.$$
Du lien entre dimension de sous-espaces vectoriels et inclusions, on en déduit que
$$\forall k < p,\ \Gamma_k \underset{\neq}{\subset} \Gamma_{k+1}, \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant p,\ \Gamma_k = \Gamma_p.$$

□

b. (Réservé aux 5/2) Montrer que, si A est diagonalisable et non inversible, alors $p = 2$.

Solution. Si A non inversible, d'après ce qui précède on sait que $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$, donc $p \geqslant 2$. De plus, 0 est donc valeur propre, disons de multiplicité r et comme A diagonalisable, il existe alors une matrice $P \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible telle que
$$A = P \left(\begin{array}{c|c} D & \mathbb{O}_{n-r,r} \\ \hline \mathbb{O}_{r,n-r} & \mathbb{O}_r \end{array} \right) P^{-1}$$
où $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale non nulle. En particulier, D est inversible. On note alors
$$B = P \left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & \mathbb{O}_{n-r,r} \\ \hline \mathbb{O}_{r,n-r} & \mathbb{O}_r \end{array} \right) P^{-1}$$
Montrons que $\Gamma_3 = \Gamma_2$, ce qui suffit à conclure. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3M = A^2M$.
Observons que
$$A^3 = P \left(\begin{array}{c|c} D^3 & \mathbb{O}_{n-r,r} \\ \hline \mathbb{O}_{r,n-r} & \mathbb{O}_r \end{array} \right) P^{-1}$$
Ainsi, en multipliant à gauche par B, on obtient, pour $k \geqslant 2$,
$$BA^k = P \left(\begin{array}{c|c} D^{-1} & \mathbb{O}_{n-r,r} \\ \hline \mathbb{O}_{r,n-r} & \mathbb{O}_r \end{array} \right) P^{-1} P \left(\begin{array}{c|c} D^k & \mathbb{O}_{n-r,r} \\ \hline \mathbb{O}_{r,n-r} & \mathbb{O}_r \end{array} \right) P^{-1} = P \left(\begin{array}{c|c} D^{k-1} & \mathbb{O}_{n-r,r} \\ \hline \mathbb{O}_{r,n-r} & \mathbb{O}_r \end{array} \right) P^{-1} = A^{k-1}$$
Ainsi, pour tout $k \geqslant 3$,
$$A^kM = A^{k-1}M \Longrightarrow A^{k-1}M = BA^kM = BA^{k-1}M = A^{k-2}M$$
donc $\Gamma_k \subset \Gamma_{k-1}$ à partir de $k = 3$. On a bien $p = 2$.

□