Devoir surveillé n°3

Solution

Ce devoir comporte deux exercices et un problème, tous indépendants.
La dernière page du sujet est à détacher et à rendre avec sa copie, une fois complétée.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1 : Une courbe piriforme

Le plan euclidien étant rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé direct, on considère la courbe Γ paramétrée par $M : t \mapsto M(t)$, où $M(t)$ est le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \sin(t)\cos^3(t) \\ y(t) & = & \sin^2(t) \end{array} \right.$$

1. Vérifier que les fonctions coordonnées x et y sont $\pi-$périodiques.

Solution. Soit $t \in \mathbb{R}$. Sachant que $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$ et $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$,

$$x(t+\pi) = \sin(t+\pi)\cos^3(t+\pi) = (-\sin(t))\,(-\cos(t))^3 = x(t)$$

$$y(t+\pi) = \sin^2(t+\pi) = (-\sin(t))^2 = y(t)$$

et on a bien le résultat voulu. On peut donc restreindre l'étude à $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. □

2. Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera. Sur quel I intervalle est-il suffisant d'étudier M ?

Solution. L'intervalle auquel on peut se restreindre - d'après la question précédente - étant centré en 0, il est naturel, pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'évaluer M en $-t$. On a

$$x(-t) = \sin(-t)\cos^3(-t) = -x(t)$$

$$y(-t) = \sin^2(-t) = (-\sin(t))^2 = y(t)$$

Ainsi, $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).
Au final, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter le tracé par symétrie d'axe (Oy). □

3. a. Montrer que Γ présente un unique point singulier, dont on précisera les coordonnées, obtenu pour un certain paramètre $t_0 \in I$ que l'on précisera.

Solution. Les deux fonctions coordonnées sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= \cos^4(t) - 3\sin^2(t)\cos^2(t) = 4\cos^4(t) - 3\cos^2(t) = \cos^2(t)\left(4\cos^2(t) - 3\right). \\ y'(t) &= 2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t). \end{aligned}$$

Il suit que, pour $t \in I$,

$$\begin{aligned} M(t) \text{ point singulier } &\iff \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \cos^2(t)\left(4\cos^2(t) - 3\right) = 0 \\ \sin(2t) = 0 \end{cases} \iff t = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On a bien une seule valeur du paramètre, $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$, en lequel Γ présente un point singulier (on observera que le symétrique de $M(t_0)$ est $M(t_0)$ donc il y a vraiment un seul point singulier). Ce point est $M(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (0, 1)$. □

b. Montrer qu'il existe deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires que l'on explicitera tel que, au voisinage de $h = 0$, on a :

$$M(t_0 + h) = M(t_0) + h^2 \cdot \vec{u} + h^3 \cdot \vec{v} + \overrightarrow{o(h^3)}.$$

Solution. Il s'agit donc d'obtenir le développement limité de M à l'ordre 3 en t_0. Pour ce faire, on utilise la formule de Taylor-Young. On dérive donc successivement les fonctions coordonnées, qu'on évalue en $t_0 = \pi/2$

$$\begin{aligned} x'(t) &= 4\cos^4(t) - 3\cos^2(t) \\ x''(t) &= -16\sin(t)\cos^3(t) + 6\sin(t)\cos(t) = 3\sin(2t) - 16\sin(t)\cos^3(t) \rightsquigarrow x''(t_0) = 0 \\ x'''(t) &= 6\cos(2t) - 16\cos^4(t) + 48\sin^2(t)\cos^2(t) \rightsquigarrow x'''(t_0) = -6. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sin(2t) \\ y''(t) &= 2\cos(2t) \rightsquigarrow y''(t_0) = -2 \\ y'''(t) &= -4\sin(2t) \rightsquigarrow y'''(t_0) = 0. \end{aligned}$$

D'après la formule de Taylor-Young, on a donc, pour h voisin de 0,

$$M(t_0 + h) = M(t_0) + \frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}t^2}(t_0) + \frac{h^3}{6}\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}t^2}(t_0) + \overrightarrow{o(h^3)} = M(t_0) + h^2 \cdot (0, -1) + h^3 \cdot (-1, 0) + \overrightarrow{o(h^3)}.$$

En posant $\vec{u} = (0, -1)$ et $\vec{v} = (-1, 0)$, on a bien les deux vecteurs non nuls (clairement non colinéaires) demandés. □

c. En déduire la nature du point singulier ainsi qu'un vecteur directeur de la tangente à Γ en ce point.

Solution. D'après la question précédente, le couple des entiers caractéristiques (p, q) vaut alors $(2, 3)$ et Γ présente donc un point de rebroussement de première espèce en $M(t_0)$ où la tangente est dirigée par $\vec{u} = (0, -1)$. □

4. Préciser les points de Γ admettant une tangente horizontale et ceux admettant une tangente verticale.

Solution. Γ admet en un point régulier $M(t)$ une tangente horizontale (resp. verticale) si et seulement si $y'(t) = 0$ (resp. $x'(t) = 0$).
Sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on trouve donc que $y'(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$ ou $t = \pi/2$. On a déjà traité le cas du point singulier $M(\pi/2)$. La tangente est donc horizontale en $M(0)$ (et c'est le seul endroit où c'est le cas).
Par ailleurs $x'(t) = 0$ si et seulement si $t = \pi/2$ ou $\cos^2(t) = 3/4$. On a déjà traité le cas du point singulier. Mais, pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$\cos^2(t) = \frac{3}{4} \iff \cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff t = \frac{\pi}{6}.$$

Donc Γ admet une tangente verticale au point $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, puis, par symétrie d'axe (Oy) également au point paramétré par $M\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$. □

5. Dresser le tableau donnant les variations conjointes des fonctions coordonnées de M sur I.

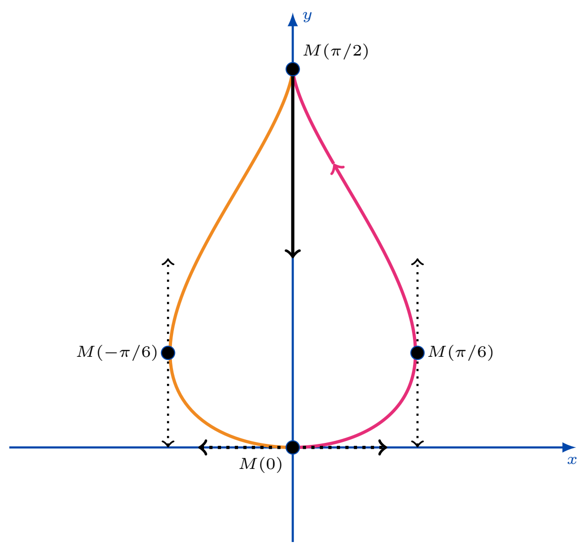
Solution. On dresse le tableau demandé facilement à partir du calcul des dérivées des fonctions coordonnées.

t	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	$3\sqrt{3}/16$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$1/4$	$\nearrow$	1
$y'(t)$		$+$		$+$	0

□

6. Tracer complètement et soigneusement Γ ainsi que les tangentes remarquables sur le quadrillage fourni en annexe que l'on détachera du sujet et glissera dans la copie. *On donne* $3\sqrt{3}/16 \simeq 0.325$.

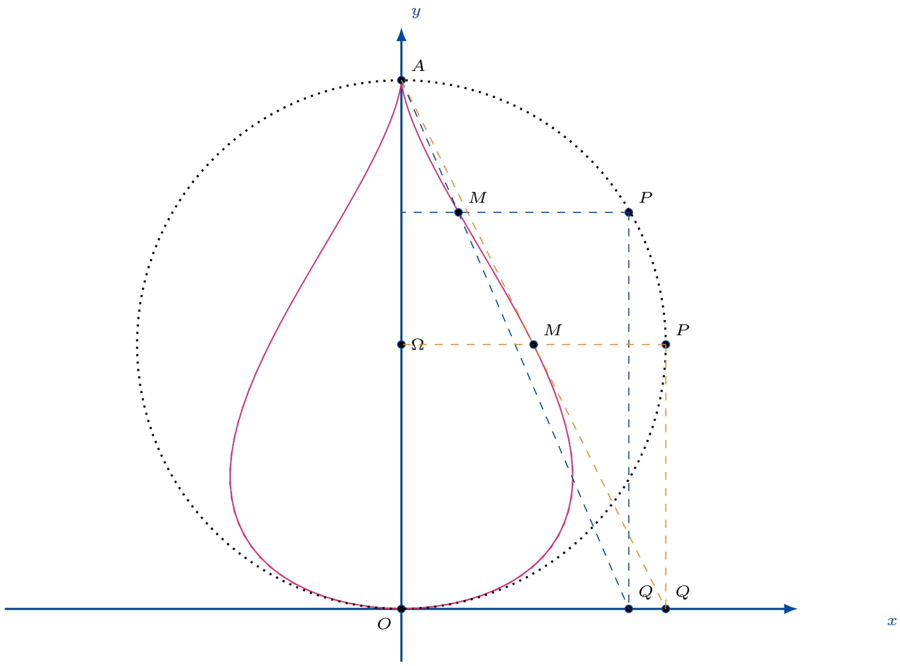
Solution. Le tableau précédent permet de tracer la portion du support de Γ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On complète le tracé par symétrie d'axe (Oy). Naturellement, on fait apparaitre toutes les tangentes susmentionnées. On observe bien un point de rebroussement de première espèce en $(0, 1)$.



On a dessiné une courbe *piriforme*, en forme donc de poire (ou de goutte d'eau). □

7. Soient A le point de coordonnées $(0, 1)$ et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$ dont le centre est noté Ω. Si P est un point mobile de $\mathcal{C}$, on note Q le projeté de P sur l'axe des abscisses.
Montrer que Γ est le lieu du point de (AQ) ayant la même ordonnée que P lorsque P décrit $\mathcal{C}$.
On commencera par vérifier que, si θ *désigne l'angle* $\left(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AP}\right)$, *alors les coordonnées de* P *sont* $\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta), \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\theta)\right)\right)$.

Solution. Commençons par faire un dessin de la construction des points M dont on cherche le lieu.



Vérifions que les coordonnées de P sont bien celles proposées.
Le triangle ΩPA est isocèle en Ω, on en déduit que la mesure de l'angle

$$\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{\Omega P}\right)$$

vaut $t = -\frac{\pi}{2} + 2\theta$.
Ω est le translaté de vecteur $\overrightarrow{j}$ de O. On peut alors facilement exprimer les coordonnées de P en fonction de t ; P a pour coordonnées (x, y) avec

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}\cos(t), \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}\right).$$

Exprimant t en fonction de θ, on a

$$\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

et

$$\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{2},$$

ce qui correspond bien aux coordonnées de P à vérifier.

Le point P ayant pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta), \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))\right)$, le point Q a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta), 0\right)$.
Ensuite, on détermine l'équation de la droite (AQ) :

$$U(x, y) \in (AQ) \iff \overrightarrow{AQ} \text{ et } \overrightarrow{AU} \text{ colinéaires } \iff \det\left(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AU}\right) = 0.$$

Or

$$\det\left(\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AU}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\sin(2\theta) & x \\ -1 & y - 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)y - \frac{1}{2}\sin(2\theta) + x$$

Ainsi, (AQ) a pour équation

$$\frac{1}{2}\sin(2\theta)y + x = \frac{1}{2}\sin(2\theta).$$

Le point M de (AQ) ayant la même ordonnée que P, c'est à dire $\frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$, a pour abscisse

$$x = \frac{1}{2}\sin(2\theta) - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \times \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) = -\frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(2\theta)\cos(2\theta)}{4}$$

Or, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ donc

$$x = \frac{2\sin(2\theta)\cos^2(\theta)}{4} = \sin(\theta)\cos^3(\theta).$$

Comme $y = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)) = \sin^2(\theta)$, on retrouve bien les fonctions coordonnées x et y qui paramétrisent Γ.

Lorsque P parcourt le cercle $\mathcal{C}$ privé de A, θ parcourt l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a donc M qui parcourt le support de Γ privé de A. Mais $A \in \Gamma$. Donc finalement, Γ est bien le lieu de M lorsque P parcourt tout le cercle $\mathcal{C}$. □

Exercice 2

Dans tout cet exercice , on s'intéresse aux propriétés d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, vérifiant

$$f^2 = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right).$$

Soit p l'endomorphisme de E défini par $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que p est un projecteur.

Solution. On sait déjà que p est linéaire, comme combinaison linéaire d'applications linéaires.
Considérant que f et Id_E commutent, et que f vérifie $f^2 = \frac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_E\right)$, on peut écrire:

$$p^2 = \tfrac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\mathrm{Id}_E = \frac{2}{9}(f + \mathrm{Id}_E) + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}\mathrm{Id}_E = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E = p.$$

On déduit alors du cours que p est le projecteur sur $\mathrm{Im}p$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. □

2. Vérifier que : $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E;\ f(x) = x\}$.

Solution. On déduit du cours que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$. Or, pour tout $x \in E$ on a :

$$x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) \iff p(x) - x = 0 \iff \frac{2}{3}f(x) - \frac{2}{3}x = 0 \iff f(x) = x.$$

D'où le résultat : $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E;\ f(x) = x\}$. □

3. Soit q le projecteur sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(p)$. Exprimer q comme combinaison linéaire de f et de Id_E.

Solution. Soit $x \in E$; il existe alors $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Par définition, on a alors $p(x) = x_1$ et $q(x) = x_2$. On en déduit $p(x) + q(x) = x_1 + x_2 = x$, puis

$$q(x) = x - p(x) = x - \left(\frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x\right) = -\frac{2}{3}f(x) + \frac{2}{3}x.$$

D'où le résultat : $q = -\frac{2}{3}f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E$. □

4. En déduire que : $E = \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$.

Solution. Comme p est un projecteur, on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. De plus on sait que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$, et par définition de p on a clairement $p(x) - x = \frac{2}{3}(f(x) - x)$ soit $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Enfin, on a pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(p) &\iff p(x) = 0 \iff \frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}x = 0 \iff f(x) + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E(x) = 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right). \end{aligned}$$

Ce qui prouve $E = \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$. □

5. Dans cette question et dans cette question uniquement, on suppose que E est de dimension finie. En considérant une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$, montrer que f est diagonalisable (c'est-à-dire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale).

Solution. Comme $\mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$ et $\mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right)$ sont supplémentaires dans E, on sait que $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ est une base de E. Montrons que la matrice de f dans celle-ci est diagonale, ce qui prouvera le résultat. Posons $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_k)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_{k+1}, \dots, e_n)$ où $n = \dim E$ et $k = \dim \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$. On a alors:

✗ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $e_i \in \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \iff f(e_i) - e_i = 0 \iff f(e_i) = e_i$; on en déduit que tous les termes de la i-ème colonne de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ sont nuls, sauf le i-ème qui vaut 1;

✗ pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$,

$$e_i \in \operatorname{Ker}\left(f + \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E\right) \iff f(e_i) + \frac{1}{2}e_i = 0 \iff f(e_i) = -\frac{1}{2}e_i;$$

on en déduit que tous les termes de la i-ème colonne de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ sont nuls, sauf le i-ème qui vaut $-\frac{1}{2}$.

Ainsi la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ est:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ & & & 1 & & & \\ \vdots & & & & -\frac{1}{2} & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{k \text{ colonnes} \quad n-k \text{ colonnes}}$$

D'où le résultat f est diagonalisable. □

6. Montrer $pq = qp = 0$.

Solution. Soit $x \in E$. Il existe $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$ tel que $x = x_1 + x_2$. D'où par définition de p et q:

$$pq(x_1 + x_2) = p(x_2) = p(0 + x_2) = 0 \quad \text{et} \quad qp(x_1 + x_2) = q(x_1) = q(x_1 + 0) = 0.$$

D'où le résultat : $pq = qp = 0$. □

7. Montrer, en utilisant les résultats précédents que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$.

Solution. Montrons le résultat par récurrence sur n.

✗ Initialisation. Pour $n = 0$, la propriété s'écrit $\mathrm{Id}_E = p + q$, ce qui a été prouvé à la Question **3.**
Pour $n = 1$ (cela nous servira dans l'hérédité), la propriété s'écrit $f = p - \frac{1}{2}q$, ce qui se vérifie aisément en utilisant les définitions de $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E$ et $q = -\frac{2}{3}f + \frac{2}{3}\mathrm{Id}_E$.

✗ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vérifiée au rang n. En utilisant les relations $pq = qp = 0, p^2 = p$ et $q^2 = q$, il vient:

$$\begin{aligned} f^{n+1} = f^n \circ f &= \left(p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q\right) \circ \left(p - \frac{1}{2}q\right) \\ &= p^2 - \frac{1}{2}pq + \left(-\frac{1}{2}\right)^n qp + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} q^2 \\ &= p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} q \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang $n+1$ et par suite le résultat : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^n q$.

□

8. Montrer que f est un automorphisme de E.

Solution. On a :

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + \mathrm{Id}_E) \iff 2f^2 - f = \mathrm{Id}E \iff f(2f - \mathrm{Id}E) = \mathrm{Id}_E,$$

et en raisonnant de même on prouve $(2f - \mathrm{Id}_E)f = \mathrm{Id}_E$.
De ces deux égalités on déduit que f est inversible, et que son inverse est $f^{-1} = (2f - \mathrm{Id}_E)$.
Ainsi f est un automorphisme de E. □

9. La relation obtenue pour f^n est-elle encore valable pour $n = -1$? Et pour $n \in \mathbb{Z}$?

Solution. On veut vérifier si l'égalité $f^{-1} = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} q = p - 2q$ est vraie. Il suffit pour cela de calculer:

$$f \circ (p-2q) = \left(p - \tfrac{1}{2}q\right)(p-2q) = p^2 - 2pq - \tfrac{1}{2}qp + q^2 = p + q = \mathrm{Id}_E,$$

où on a utilisé les résultats prouvés ci-avant. Cela prouve que l'on a $f^{-1} = p - 2q$.
Enfin, si $k \in \mathbb{N}$, pour prouver $f^{-k} = p + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} q$, on raisonne de même:

$$\begin{aligned} f^k \circ \left(p + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-k} q\right) &= \left(p + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k} q\right)\left(p + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-k} q\right) \\ &= p^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k} qp + (-2)^k pq + q^2 \\ &= p + q = \mathrm{Id}_E. \end{aligned}$$

D'où le résultat : $\forall n \in \mathbb{Z},\ f^n = p + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n q.$ $\square$

Problème

Partie 1 : Une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (W_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t.$$

1. Calculer W_0 et W_1.

Solution. Ces calculs ne posent pas de problème

$$\begin{aligned} W_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \\ W_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 \end{aligned}$$

$\square$

2. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

Solution. On se doute qu'il suffit de poser $x = \frac{\pi}{2} - t$, changement de variable affine donc licite, qui donne notamment $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$, $t = \frac{\pi}{2} - x$ et

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-\mathrm{d}x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x,$$

car les formules usuelles de trigonométrie donnent $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. $\square$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$ et que (W_n) est décroissante.

Solution. On sait que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \in [0;1]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aura $\cos^n(t) \geq \cos^{n+1}(t)$. Par positivité de l'intégrale (dont les bornes sont rangées dans l'ordre croissant), on a bien $W_n \geq W_{n+1}$, ou encore que la suite (W_n) est décroissante. $\square$

4. À l'aide d'une intégration par parties et de la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

En déduire que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

Solution. L'indication suggère de remarquer que

$$\cos^{n+2}(t) = \cos^2(t)\cos^n = \left(1-\sin^2(t)\right)\cos^n(t) = \cos^n(t) - \sin(t)\sin(t)\cos^n(t)$$

et de poser

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & -\sin(t)\cos^n(t) \\ v(t) & = & \sin(t) \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}(t) \\ v'(t) & = & \cos(t) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc faire notre IPP pour obtenir

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t \\ &= W_n - \left[\frac{\sin(t)\cos^{n+1}(t)}{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme $\cos(\pi/2) = 0 = \sin(0)$, on obtient

$$W_{n+2} = W_{n+1} - \frac{1}{n+1}W_{n+2},$$

ou encore

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)W_{n+2} = W_{n+1}$$

et puis

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

comme attendu. □

5. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$.
En calculant $J_{n+1} - J_n$, montrer que la suite (J_n) est constante et préciser sa valeur.

Solution. On fait ce qu'on nous demande. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} J_{n+1} - J_n &= (n+2)W_{n+1}W_{n+2} - (n+1)W_nW_{n+1} \\ &= (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n - (n+1)W_nW_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (J_n) est constante. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = J_0 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.$$

□

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Observons que $W_n \geq 0$ (car $\cos(t) \geq 0$ sur $[0; \pi/2]$ et on applique la croissance de l'intégrale). On sait déjà que $\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n}$. Mais, on sait aussi que (W_n) est décroissante, donc $W_{n+2} \leq W_{n+1}$, ce qui donne

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

mais aussi $W_{n+1} \leq W_n$ ou encore $\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. On a bien l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

□

7. Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$, lorsque $n \to +\infty$. Obtenir finalement que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ n \to +\infty.$$

Solution. Comme $n+1 \sim n+2$, lorsque $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes avec l'encadrement précédent donne
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1 \iff W_n \sim W_{n+1},\ n \to +\infty.$$
On utilise alors la valeur de J_n, on a, pour $n \to +\infty$,
$$\frac{\pi}{2} = J_n = (n+1)W_n W_{n+1} \sim n W_n^2$$
ou encore
$$W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$
et enfin
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}},\ n \to +\infty.$$
□

Partie 2 : L'intégrale de Gauss

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

8. Justifier rigoureusement la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Solution. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, l'intégrale est impropre en $+\infty$. Sur $[0;1]$, il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue donc l'intégrale existe. Observons que, par croissance comparée
$$e^{-x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x \to +\infty.$$
Or, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est convergente.

Par critère de négligeabilité pour des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ est encore convergente.

Au final, l'intégrale est bien convergente sur $[0;+\infty[$.

□

9. Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(1-x) \leq -x$.

Solution. On l'a fait 1000 fois. Un argument de concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ permet de dire que sa courbe est au dessous de toutes ses tangentes, notamment celle en 0 d'équation $y = -x$, ce qui donne l'inégalité demandée.
Sinon, on peut aussi étudier les extrema de la fonction $x \mapsto \ln(1-x) + x$. □

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déduire de la question précédent que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $x \in [0, \sqrt{n}]$. On a d'après l'inégalité ci-avant et la croissance de la fonction exponentielle
$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$$
et donc
$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) \leq e^{-x^2}.$$
La positivité de l'intégrale permet de conclure à l'inégalité souhaitée. □

11. Montrer de même qu'on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x$$

Solution. De la même manière, on a
$$\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n}$$
donc
$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\right) \geq e^{-x^2}$$
et la positivité de l'intégrale donne à nouveau l'inégalité voulue. □

12. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}\cos(u)$, montrer que
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

Solution. Considérons donc le changement de variable $x = \sqrt{n}\cos(u)$. Comme cos est bijective de $[0,\pi/2]$ sur $[0,1]$, il suit que la définition précédente est équivalente à $u = \arccos\left(x/\sqrt{n}\right)$ qui définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\sqrt{n}]$, bijective à valeurs dans $[0,\pi/2]$. On a même
$$\mathrm{d}x = \sqrt{n}\cos'(u)\mathrm{d}u = -\sqrt{n}\sin(u)\mathrm{d}u.$$
On obtient
$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2(u)\right)^n \sin(u)\sqrt{n}\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(u)\mathrm{d}u \\
&= \sqrt{n}W_{2n+1},
\end{aligned}$$
comme demandé. □

On **admet** que le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(u)$ permet d'obtenir : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \sqrt{n}W_{2n-2}$.
On a donc l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

13. À l'aide de la Question **7.** de la **Partie 1**, conclure quant à la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Solution. D'après la Question **7.** de la **Partie 1.**, on a
$$W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$
et
$$W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$
En divisant donc l'encadrement précédent par $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, le théorème des gendarmes nous permet d'affirmer que tout tend vers 1. Il suit que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$
ce qui fait plaisir. □