Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir surveillé n°4

Solution

Ce devoir comporte quatre exercices, tous indépendants.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Exercice 1 : Un calcul de $\zeta(2)$

On rappelle que pour un entier naturel n, la n-ième intégrale de Wallis est l'intégrale

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t.$$

Les propriétés suivantes des intégrales de Wallis, qu'on utilisera librement, ont été obtenues dans le **Devoir Surveillé n°3**.

- ✗ $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ et $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
- ✗ $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, $n \to +\infty$.

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \;\mathrm{d}t \quad \text{ et } \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \;\mathrm{d}t$$

1. Déduire des rappels admis une relation entre I_{n+1} et I_n.

Solution. D'après les rappels des résulats (admis pour ce devoir), $I_{n+1} = W_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$. □

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = n\left((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n\right)$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✗ On effectue une première intégration par parties (on intègre $t \mapsto 1$ et on dérive $\cos^{2n}$) pour obtenir
$$I_n = 2n \int_0^{\pi/2} t \sin t \cos^{2n-1} t \mathrm{d}t$$
- ✗ on fait ensuite une deuxième intégration par parties (on intègre $t \mapsto t$ et en dérive $\sin \cos^{2n-1}$) et on utilise l'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ pour obtenir
$$I_n = n\left((2n-1)J_{n-1} - 2nJ_n\right).$$

□

3. En déduire que si l'on pose $Q_n = \dfrac{J_n}{I_n}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}$$

Solution. Notons que Q_n existe car, d'après les résultats admis, $I_n = W_{2n} > 0$. En divisant la relation précédente par I_n, on obtient :

$$1 = n(2n-1)\frac{J_{n-1}}{I_n} - 2n^2 Q_n.$$

Comme $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$, on a $\dfrac{2n-1}{I_n} = \dfrac{2n}{I_{n-1}}$, donc $1 = 2n^2\left(\dfrac{J_{n-1}}{I_{n-1}} - Q_n\right) = 2n^2(Q_{n-1} - Q_n)$, soit

$$Q_{n-1} - Q_n = \frac{1}{2n^2}.$$

□

4. Justifier que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \leqslant \frac{\pi}{2}\sin x$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(I_n - I_{n+1}\right) = \frac{\pi^2}{4}\frac{I_n}{2n+2}$$

Solution.

✗ Étudions la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{\pi}x - \sin x$ sur $E = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos x$, $f''(x) = \sin x > 0$ pour $x \neq 0$. Ainsi f' est strictement croissante sur E et comme $f'(0) = \frac{2}{\pi} - 1 < 0$, $f'(\pi/2) = 2/\pi > 0$, f' s'annule (par le théorème de la bijection) une et une seule fois sur E, disons en un certain α. On en déduit alors le tableau de variations de f :

x	0		α		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

d'où l'on tire que $f \leq 0$ sur E, ce qui constitue l'inégalité voulue.

✗ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant J_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4} \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t} \cos^{2n} t dt = \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1})$;

or $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$, donc

$$I_n - I_{n+1} = I_n\left(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\right) = \frac{I_n}{2n+2}$$

d'où

$$J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(I_n - I_{n+1}\right) = \frac{\pi^2}{4}\frac{I_n}{2n+2}.$$

□

5. En déduire que (Q_n) converge vers 0.

Solution. En divisant la relation obtenue à la question précédente par I_n, on obtient : $0 \leqslant Q_n \leqslant \dfrac{\pi^2}{4(2n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui par le théorème d'encadrement permet de conclure que $Q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

6. Calculer Q_0 puis utiliser un télescopage pour montrer que :

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solution. Comme $I_0 = W_0 = \pi/2$ et $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{24}$, on obtient : $Q_0 = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} 2(Q_{n-1} - Q_n) \underset{\text{télescopage}}{=} 2(Q_0 - Q_N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2Q_0$, on en conclut que :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Une matrice carrée **non nulle** $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

1. a. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$. Quel est nécessairement le polynôme caractéristique de N ?

Solution. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Il existe donc $p \neq 0$ tel que $N^p = 0$. Si λ est valeur propre de N, alors en considérant un vecteur propre $X \neq 0$ associé à λ, on a $NX = \lambda X$ ce qui donne (par une récurrence immédiate) $0 = N^p X = \lambda^p X$. Comme $X \neq 0$, on a $\lambda^p = 0$ ou encore $\lambda = 0$. Ainsi, 0 est alors la seule valeur propre possible pour N (reste à montrer qu'elle l'est bien). On a pour l'instant $\mathrm{Sp}(N) \subset \{0\}$.
Comme $N^p = 0$ alors N est non inversible (sinon N^p le serait) donc 0 est valeur propre, ainsi 0 est la seule valeur propre de N. On peut conclure que

$$\mathrm{Sp}(N) = \{0\}.$$

Observant que 0 est la seule valeur propre (complexe) de N et que, dans $\mathbb{C}$, son polynôme caractéristique est scindé, unitaire et de degré n, on a immédiatement

$$\chi_N(X) = X^n.$$

□

b. Une matrice nilpotente N est-elle diagonalisable ?

Solution. On peut raisonner par l'absurde. Si N était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale ; mais n'ayant que 0 pour valeur propre, cette matrice diagonale serait nulle et donc N serait nulle, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Ainsi N n'est pas diagonalisable.

On peut aussi dire que le seul sous-espace propre (qui est alors le noyau de N) n'est pas de dimension n car sinon la matrice serait nulle (ce qui n'est pas le cas) et donc la somme des dimensions des sous-espaces propres n'étant pas égale à n, N n'est pas diagonalisable. □

Dans la suite de cet exercice, on s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices carrées d'ordre n dont les valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux.
Plus précisément, on a

$$M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{D}_n \iff \mathrm{Sp}(M) = \{m_{i,i} :\ 1 \leq i \leq n\}.$$

2. Justifier que $\mathcal{D}_n$ contient des matrices autres que la matrice nulle et qui ne sont pas diagonales.

Solution. D'après le cours, toute matrice triangulaire a pour valeurs propres ses coefficients diagonaux. Donc $\mathcal{D}_n$ contient toutes les matrices triangulaires. Parmi celles-ci, il est clair que certaines ne sont ni nulles, ni diagonales. □

3. Montrer que, si $M \in \mathcal{D}_n$ alors, pour tout réel α, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore élément de $\mathcal{D}_n$.

Solution. Soit M une matrice de $\mathcal{D}_n$. Les valeurs propres de M sont donc les termes de sa diagonale. Or,

$$\begin{aligned}
\beta \text{ est valeur propre de } (M+\alpha I_n) &\iff (M + \alpha I_n - \beta I_n) = (M - (\beta - \alpha) I_n) \text{ est non inversible} \\
&\iff \beta - \alpha \text{ est valeur propre de } M \\
&\iff \beta - \alpha \text{ est sur la diagonale de } M \\
&\iff \beta \text{ est sur la diagonale de } M + \alpha I_n
\end{aligned}$$

Ainsi, si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$. □

4. a. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Montrer que K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.

Solution. On constate que

$$K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc n ($\neq 1$) est valeur propre de K_n. Or K_n n'a que des 1 sur la diagonale et ne peut donc être un élément de $\mathcal{D}_n$. □

b. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution. On utilise la question précédente pour écrire K_n comme combinaison linéaire de deux matrices éléments de $\mathcal{D}_n$. Il suffit de faire un découpage en somme d'une matrice triangulaire inférieure et d'une matrice triangulaire supérieure:

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chacune des deux matrices est un élément de $\mathcal{D}_n$ (comme matrice triangulaire) mais leur somme, égale à K_n n'est pas un élément de $\mathcal{D}_n$ qui ne peut donc être un sous-espace vectoriel. □

5. a. Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$$

Solution. C'est immédiat : on utilise la caractérisation de l'inversibilité par le déterminant de la matrice. En effet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \text{ inversible} \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \times z - y \times x \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad xy \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x \neq 0 \textbf{ et } y \neq 0. \end{aligned}$$

□

b. En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$. Ses valeurs propres sont donc nécessairement a et d. Mais, on observe que

$$\begin{aligned} M - aI_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix} \text{ non inversible} \quad &\Longleftrightarrow \quad b = 0 \text{ ou } c = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad M \text{ est triangulaire (inférieure ou supérieure).} \end{aligned}$$

Il suit donc que les seules matrices de $\mathcal{M}_2$ qui sont des éléments de $\mathcal{D}_2$ sont les matrices triangulaires. □

6. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$. Cette matrice est-elle diagonalisable?

Solution. Pour savoir si A est dans $\mathcal{D}_3$, il suffit de voir si ses valeurs propres sont bien ses coefficients diagonaux, à savoir $2, 3$ et 4. Pour ce faire, déterminons sont polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3) \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda-2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)\left((\lambda-2)(\lambda-4)+1\right) - (\lambda-3) \\ &= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4) \end{aligned}$$

On en déduit que les valeurs propres sont bien celles cherchées donc $A \in \mathcal{D}_3$.
De plus, A a trois valeurs propres distinctes : elle est bien diagonalisable. □

7. Pour tout t réel, on considère la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t. En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Solution. Soit $t \in \mathbb{R}$. On calcule le polynôme caractéristique de $M(t)$.

$$\begin{aligned}
\chi_{M(t)}(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1-t \\ 0 & \lambda-2 & 1+t \\ -1 & -1 & \lambda-4-2t \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1+t \\ -1 & -1 & \lambda-4-2t \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1+t \\ -1 & -1 & \lambda-4-2t \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_2-C_1}{=} (\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1+t \\ -1 & 0 & \lambda-4-2t \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1+t \\ 0 & \lambda-4-2t \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-(4+2t)).
\end{aligned}$$

En particulier, les valeurs propres de $M(t)$ sont bien $3, 2$ et $4+2t$ qui sont les éléments diagonaux de $M(t)$ qui est bien, pour tout $t \in \mathbb{R}$, éléments de $\mathcal{D}_3$. □

b. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Solution. Si t est différent de $-1/2$ et de -1, alors les valeurs propres de $M(t)$ sont deux à deux distinctes (et il y en a 3) donc $M(t)$ est diagonalisable.
Pour ces deux valeurs particulières, il faut regarder la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre de multiplicité 2.

✗ Si $t = -1$, alors $4 + 2t = 2$. On regarde donc $E_2(M(-1)) = \operatorname{Ker}(M(-1) - 2I_3)$.

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2(M(-1)) &\iff M(-1)X = 2X \iff x + y = 0 \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc $E_2(M(-1)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 2 égale à la multiplicité de la valeur propre : $M(-1)$ est bien diagonalisable.

✗ Si $t = -1/2$, alors $4 + 2t = 3$. On regarde donc $E_3(M(-1/2)) = \operatorname{Ker}(M(-1/2) - 3I_3)$.

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(M(-1/2)) &\iff M(-1/2)X = 3X \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y+z &=& 0 \\ -2y-z &=& 0 \\ x+y &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -y \\ z &=& -2y \end{array}\right. \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc $E_3(M(-1/2)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1 qui n'est pas égal à la multiplicité de la valeur propre : $M(-1/2)$ n'est pas diagonalisable.

Bilan : $M(t)$ est diagonalisable si et seulement si $t \neq -\frac{1}{2}$. □

Dans **toute la suite** de l'exercice, on se place dans le cas où $n = 3$. On considère une matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note χ_M le polynôme caractéristique de M.

8. a. Exprimer $\det(M)$ en fonction de a, b, c, d, e et f.

Solution. Un calcul en développant selon la première ligne donne immédiatement $\det(M) = ade + bcf$. □

b. Montrer qu'il existe une quantité $\gamma(M)$, que l'on exprimera en fonction de a, b, c, d, e et f telle que

$$\chi_M(X) = X^3 - \gamma(M)X - \det(M).$$

Solution. On calcule (à nouveau) un polynôme caractéristique. On se lasserait presque. Heureusement cet exercice reste quand même bien chouette.

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & -a & -b \\ -c & \lambda & -d \\ -e & -f & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -d \\ -f & \lambda \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -c & -d \\ -e & \lambda \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} -c & \lambda \\ -e & -f \end{vmatrix} \\
&= \lambda\left(\lambda^2 - fd\right) + a(-c\lambda - de) - b(e\lambda + cf) \\
&= \lambda^3 - (ac + df + be)\lambda + ade + bcf \\
&= \lambda^2 - \gamma(M)\lambda + \det(M),
\end{aligned}$$

où on a posé $\gamma(M) = ac + df + be$. □

c. Montrer que $\gamma(M) = \det(M) = 0$ si et seulement si M est nilpotente.

Solution. On procède par double implication.

- ✗ Si M est nilpotente, d'après la Question **1.a.**, son polynôme caractéristique est X^3. Par identification, on a donc $\gamma(M) = \det(M) = 0$.
- ✗ Supposons que $\gamma(M) = \det(M) = 0$. Son polynôme caractéristique est alors égal àX^3 et est notamment scindé. Ainsi, M est trigonalisable et donc semblable à une matrice N de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice vérifie $N^3 = 0$. Donc $M^3 = 0$ et M est bien nilpotente.

□

9. a. On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

Solution. On suppose que a, b et d sont égaux à 1. Par la question précédente, M est nilpotente si et seulement si $ac + df + be = c + f + e = 0$ et $bcf + ade = cf + e = 0$, ce qui donne

$$\begin{cases} e &= -cf \\ c + f - cf &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e &= -cf \\ c\,(1-f) &= -f \end{cases}$$

et, pour $f \neq 1$, le système donne

$$\begin{cases} e &= f^2/\,(1-f) \\ c &= -f/\,(1-f) \end{cases}.$$

Donc pour chaque $f \neq 1$ il y a une solution au système, ce qui en fait une infinité de triplets (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente. □

b. En déduire que $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.

Solution. Pour a, b et d égaux à 1 et $f \neq 1$ (et non nul afin que la matrice M ne soit pas triangulaire), la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/\,(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/\,(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$$

est non triangulaire et nilpotente d'après les calculs précédents. Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Et comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a $M \in \mathcal{D}_3$. On a bien exhibé une infinité de matrices non triangulaires et éléments de $\mathcal{D}_3$. $\square$

10. Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Solution. Pour avoir tous les coefficients non nuls, on utilise le résultat obtenu à la Question **3.** Avec $f = 2$, on a une matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$$

donc

$$M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$$

avec tous ses coefficients non nuls. $\square$

Exercice 3

On s'intéresse à la série $\sum u_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$.

1. On note, pour tout $n \geq 1$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

a. À l'aide de développements limités usuels, montrer que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.

Solution. On a, pour $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2n^2}, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. $\square$

b. Montrer alors que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ.

Solution. Observant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(-\dfrac{1}{n+1}\right) \leq 0$ car on sait bien que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$. Ainsi, tous les termes de la suite $(w_{n+1} - w_n)$ sont négatifs. De plus, la série $\sum -\dfrac{1}{2n^2}$ est convergente (c'est le multiple d'une série de Riemann convergente).
Par critère d'équivalence pour des séries à termes de signe constant, on peut conclure que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge.
On note alors γ sa somme. Cette constante est appelée *constante d'Euler*. $\square$

2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ sur $]0, +\infty[$.
Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

Solution. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $t > 0$, on a

$$\varphi'(t) = \frac{1 - \ln(t)}{t^2} \geq 0 \iff t \leq e.$$

Par croissante comparée, la limite à l'infini est nulle. Par algèbre des limites, celle en 0 vaut $-\infty$.
On dresse donc le tableau demandé :

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
φ	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

$\square$

3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Est-elle absolument convergente ?

Solution. D'après la question précédent, la suite $\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)_{n\geq 3}$ est (à termes positifs), décroissante vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, on peut conclure que la série $\sum\limits_{n\geq 3} u_n$ converge donc $\sum u_n$ aussi (les deux premiers termes ne changent pas la nature de la série, surtout que le premier est nul..).
En revanche, pour $n \geq 3$

$$|u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$$

et comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la série $\sum |u_n|$ est divergente par comparaison. $\square$

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.

a. Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a : $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$.

Solution. Soit $n \geq 3$. La fonction φ étant décroissante d'après ce qui précède sur $[n, n+1]$, on a, pour tout $t \in [n, n+1]$,

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(t)}{t} \leq \frac{\ln(n)}{n}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient bien $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t$. $\square$

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.

Solution. Soit $n \geq 3$. D'une part, on a, d'après la question précédente

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2 + \ln(n)^2}{2} \\ &\leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t - \frac{\ln(n+1)^2 + \ln(n)^2}{2} = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_n^{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2 + \ln(n)^2}{2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

et (v_n) est bien décroissante.

De plus, on observe que (en utilisant l'autre inégalité pour l'intégrale - qui n'était pas demandée mais qu'on prend l'initiative d'utiliser après l'avoir démontrée), on a

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2} = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(n)^2}{2} \\ &\geq \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t - \frac{\ln(n)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t - \frac{\ln(n)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(2) - \ln(3)^2}{2} + \frac{\ln(n+1)^2 - \ln(n)^2}{2} \geq \frac{\ln(2) - \ln(3)^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est aussi minorée. Par théorème de convergence monotone, elle converge. □

5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

puis que :

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n).$$

Solution. Partons du membre de droite. On fait une sommation par paquets.

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\ln(2j+1)}{2j+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}\ln(2k)}{2k} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{2j+1}\ln(2j+1)}{2j+1} \\ &= S_{2n}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - v_{2n} - \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{\ln(n)^2 - (\ln(2)+\ln(n))^2}{2} \\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{\ln(n)^2 - \ln(2)^2 - 2\ln(2)\ln(n) - \ln(n)^2}{2} \\ &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \ln(2)\ln(n) - \frac{[\ln 2]^2}{2}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue. □

6. Démontrer alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma\ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

Solution. La formule obtenue précédemment se réécrit

$$S_{2n} = \ln(2)w_n + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln 2]^2}{2}.$$

On sait que $w_n \to \gamma$, que (v_n) converge (donc (v_{2n}) aussi et vers la même limite). On sait que (S_{2n}) converge et a la même limite que (S_n), on conclut que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k\ln(k)}{k} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ln(2)\gamma - -\frac{[\ln 2]^2}{2}.$$

□

Exercice 4

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant. L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. **Étude pour un nombre fini de tirages.** Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement : "Les n premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noires". On note $u_n = P(B_n)$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

   Solution. La suite (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion. En effet

$$\begin{aligned} B_{n+1} \text{ est réalisé} &\iff \text{Les } n+1 \text{ premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noire} \\ &\implies \text{Les } n \text{ premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noire} \\ &\iff B_n \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

   Donc $B_{n+1} \subset B_n$ et donc la suite (u_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 (les termes sont des probabilités) : elle est donc convergente par théorème de convergence monotone. □

   b. Montrer que

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$$

   Solution. Introduisons, pour $k \geq 1$, l'évènement A_k qui est réalisé si et seulement si le $k-$ème tirage a lieu et amène une boule blanche. Alors

$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

   Par la formule des probabilités composées, on a

$$P(B_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

   Or, on connait la composition de l'urne au moment de piocher si on sait ce qu'on amené les tirages précédents. Plus précisément, après k tirages ayant amené une boule blanche, on a 2^k boules blanches dans l'urne et toujours une noire, ce qui donne

$$P_{A_1\cap\ldots\cap A_k}(A_{k+1}) = \frac{2^k}{2^k+1}.$$

   Au final, on a bien

$$u_n = P(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2+1} \times \ldots \times \frac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}.$$

   □

2. **Étude à l'infini.** On note B_∞ l'évènement "l'expérience ne s'arrête jamais".

   a. Montrer que $P(B_\infty) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   Solution. Par définition des évènements

$$\begin{aligned} B_\infty \text{ est réalisé} &\iff \text{On a jamais la boule noire} \\ &\iff \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ les } n \text{ premières tirages amènent une boule blanche} \\ &\iff \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n \text{ est réalisé} \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$B_\infty = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n.$$

   La suite (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion. Par théorème de la limite monotone, on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n.\right) = P(B_\infty).$$

□

b. Montrer que $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$. Conclure que $P(B_\infty) > 0$.

Solution. Par propriété du log, on a

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2^k}{1+2^k}\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2^k+1}{2^k}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right),\end{aligned}$$

ce qui donne bien la formule attendue.
La série $\sum \ln(1+2^{-k})$ est convergente car

$$\ln(1+2^{-k}) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \to +\infty$$

et un critère d'équivalence pour séries à termes positifs s'applique (car la série géométrique de raison 1/2 ci-dessus est bien convergente). Notons S sa somme.
Il suit que

$$u_n = \exp(\ln(u_n)) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-S) > 0,$$

et on a bien $P(B_\infty) > 0$.

□