Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Devoir surveillé n° 6

Vendredi 7 Février
Durée : 4 heures

Ce devoir comporte deux exercices et un problèmes, tous trois indépendants.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Problème

Partie 1 - Préliminaires

1. Soient m, n deux entiers naturels non nuls et p un autre entier naturel tel que $p \leq m$ et $p \leq n$.
Montrer, à l'aide d'un produit de Cauchy judicieusement identifié, que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p} \qquad (*)$$

2. On pose, pour $k \in [\![0;p]\!]$,

$$p_k = \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}}.$$

À l'aide de la formule $(*)$, vérifier que $(p_k)_{0 \leq k \leq p}$ définit une distribution de probabilité.

On considère un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère alors une variable aléatoire Z telle que $Z(\Omega) = [\![0,p]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $P(Z=k) = p_k$.
Une telle variable est dite *hypergéométrique* et on notera

$$Z \sim \mathcal{H}\left(p, \frac{p}{n}, n\right).$$

2. a. Montrer que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

b. En déduire, toujours à l'aide de $(*)$, que

$$E(Z) = \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-1-(k-1)} = \frac{p^2}{n}.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant chacune une variance. Montrer que :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Partie 2 - Une tombola

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. Dans une tombola, il y a n tickets (numérotés de 1 à n) dans une urne dont p sont gagnants et connus à l'avance par l'organisateur du jeu (et les autres perdants). Naturellement $1 \leq p \leq n-1$.

Un joueur achète successivement p tickets, choisis au hasard.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i-$ème ticket acheté est gagnant et 0 sinon.

Enfin, on note $A_{n,p}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de numéros gagnants parmi les tickets achetés.

4. Reconnaître la loi de X_1 (en précisant le ou les paramètres). Que vaut son espérance ?

5. **a**. Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2).
b. En déduire la loi marginale de X_2.
c. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
d. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

On pourrait montrer mais, on **admet**, dans toute la suite, que toutes les variables X_i suivent la même loi $\mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$ (pour $1 \leq i \leq p$) et que, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]$ tel que $i \neq j$, que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

6. **a**. Exprimer $A_{n,p}$ en fonction de $X_1, ..., X_p$.
b. Déduire de la question précédente la valeur de l'espérance de $A_{n,p}$.
c. À l'aide de la Question **3.** et de la relation ci-dessus, montrer que

$$V(A_{n,p}) = \frac{p^2(n-p)^2}{n^2(n-1)}.$$

On observera qu'on a déterminé l'espérance et la variance de $A_{n,p}$ sans en déterminer la loi. Ce qu'on va quand même faire dans la (dernière) question ci-dessous.

7. Afin de déterminer la loi de $A_{n,p}$, on modélise l'expérience par un tirage *simultané* des p tickets dans l'urne qui en contient toujours n. Un tirage est donc un ensemble de p numéros de tickets, tous éléments (distincts) de $[\![1, n]\!]$.

a. Quel est dans ce cas le nombre total de tirages possibles?
b. Combien de ces tirages contiennent k tickets gagnants?
c. Déterminer la loi de $A_{n,p}$. Comparez les résultats des Questions **2.b.** et **6.b.**

Exercice 1

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère la matrice aléatoire M définie comme suit.
Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

2. Montrer que, presque sûrement, M est diagonalisable.

3. Soient alors λ_1 et λ_2 les variables aléatoires égales aux valeurs propres de M.
Calculer $\mathrm{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Exercice 2

On s'intéresse à la suite de polynômes (T_n), appelés *polynômes de Tchebychev*[1], définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. **a.** Expliciter T_2 et T_3.
   b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n.
   c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, ..., T_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3. **a.** Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ est convergente.
   On pourra raisonner en traitant séparément le cas où $PQ(1) \neq 0$ et le cas où $PQ(1) = 0$ (même chose en -1).
   b. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \end{array}$$
   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   On notera $\langle ., . \rangle$ ce produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

   c. Montrer que, pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq m$, on a : $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.
   On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$.

   d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que:
$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n \geqslant 1 \\ \pi, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$
   e. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :
$$\mathrm{d}_n = \inf \{\|X^n - P\| : \ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}.$$
   a. Montrer alors que : $\mathrm{d}_n = \dfrac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.
   b. Déterminer en particulier la valeur de d_2.
   On commencera par exprimer X^2 en fonction de T_2, T_1 et T_0.

[1] Déja rencontrés dans le **Devoir Surveillé n°2**