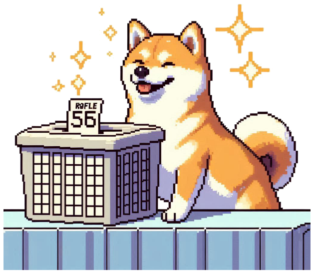
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Devoir surveillé n°6

Solution

Ce devoir comporte deux exercices et un problèmes, tous trois indépendants.
Chaque exercice doit être rédigé sur une copie indépendante.

La qualité de la rédaction et de la présentation (notamment de la lisibilité), la précision, la concision, la rigueur et la clarté des raisonnements, sont des éléments importants pour l'évaluation de la copie.
En particulier, les résultats doivent être encadrés et vos feuillets doivent êtres numérotés.

Problème

Partie 1 - Préliminaires

1. Soient m, n deux entiers naturels non nuls et p un autre entier naturel tel que $p \leq m$ et $p \leq n$.
Montrer, à l'aide d'un produit de Cauchy judicieusement identifié, que :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p} \qquad (*)$$

Solution. Soient m, n deux entiers naturels non nuls et p un autre entier naturel tel que $p \leq m$ et $p \leq n$.
Commençons par observer que, par la formule du binôme, pour tout x réel

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k, \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Par produit de Cauchy,

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} x^j \binom{n}{k-j} x^{k-j} = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}\right) x^k.$$

Or,

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n}\binom{m+n}{k} x^k$$

et par identification pour $k = p$,

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{n}{j}\binom{m}{p-j} = \binom{m+n}{p}.$$

□

2. On pose, pour $k \in [\![0;p]\!]$,

$$p_k = \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}}.$$

À l'aide de la formule $(*)$, vérifier que $(p_k)_{0\leq k\leq p}$ définit une distribution de probabilité.

Solution. Commençons par observer que, chaque coefficient binomial étant un entier, les quotients de produits de coefficients binomiaux sont des quantités positives (ou nulles), ainsi, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $p_k \geq 0$.
De plus,

$$\sum_{k=0}^{p} p_k = \sum_{k=0}^{p} \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}} = \frac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} = 1,$$

en appliquant la formule démontrée à la question précédente avec p et $n-p$. La suite définit bien une distribution de probabilité. $\square$

On considère un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère alors une variable aléatoire Z telle que $Z(\Omega) = [\![0,p]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,p]\!]$, $P(Z=k) = p_k$.
Une telle variable est dite *hypergéométrique* et on notera

$$Z \sim \mathcal{H}\left(p, \frac{p}{n}, n\right).$$

2. **a**. Montrer que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

Solution. Ègalité classique déjà rencontrée, parfois connus sous le nom de *Formule du capitaine.*
Soit $k \in [\![1,p]\!]$, on a :

$$k\binom{p}{k} = k\frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)!}{(k-1)!(p-1-(k-1))!} = p\binom{p-1}{k-1}.$$

$\square$

b. En déduire, toujours à l'aide de $(*)$, que

$$E(Z) = \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-1-(k-1)} = \frac{p^2}{n}.$$

Solution. Par définition,

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=0}^{p} kP(Z=k) = \sum_{k=0}^{p} k\frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}} = \sum_{k=1}^{p} k\frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}} \\
&= \frac{1}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} k\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} \\
&= \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-k} = \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{k=1}^{p} \binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-1-(k-1)} \\
&= \frac{p}{\binom{n}{p}} \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p-1}{j}\binom{n-p}{p-1-j} = \frac{p}{\binom{n}{p}} \times \binom{n-1}{p-1} \qquad \text{(d'après } (*)\text{)} \\
&= \frac{p(n-1)!p!(n-p)!}{n!(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{p^2}{n},
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu. $\square$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant chacune une variance. Montrer que :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Solution. On peut procéder par récurrence.. mais ici on va plutôt proposer une preuve directe en utilisant la bilinéarité de la covariance :

$$\begin{aligned}
V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j< i}} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ j> i}} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

□

Partie 2 - Une tombola

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers. Dans une tombola, il y a n tickets (numérotés de 1 à n) dans une urne dont p sont gagnants et connus à l'avance par l'organisateur du jeu (et les autres perdants). Naturellement $1 \leq p \leq n-1$.

Un joueur achète successivement p tickets, choisis au hasard.

Pour $1 \leq i \leq p$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le $i-$ème ticket acheté est gagnant et 0 sinon.

Enfin, on note $A_{n,p}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de numéros gagnants parmi les tickets achetés.

4. Reconnaître la loi de X_1 (en précisant le ou les paramètres). Que vaut son espérance ?

Solution. On reconnait une loi de Bernoulli, mais il faut préciser le paramètre. Lors de l'achat du premier ticket, l'obtention de tous les numéros est équiprobable. Il y a p numéros gagnants et n tickets en tout, on a donc

$$P(X_1 = 1) = \frac{p}{n}.$$

Ainsi, $X_1 \sim \mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$. Il découle du cours que $E(X_1) = \frac{p}{n}$. □

5. **a.** Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2).

Solution. Sachant $[X_1 = 1]$, il reste $p-1$ bons tickets dans l'urne qui en contient $n-1$. Sachant $[X_1 = 0]$ il en reste p. Il suit que

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{n-p}{n} \times \frac{n-p-1}{n-1} \\
P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) &= P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{n-p}{n} \times \frac{p}{n-1} \\
P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) &= P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) = \frac{p}{n} \times \frac{n-p)}{n-1} \\
P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) &= P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{p}{n} \times \frac{p-1}{n-1}
\end{aligned}$$

On résume cette loi conjointe sous forme d'un tableau

$X_1\backslash X_2$	0	1
0	$\dfrac{(n-p)(n-p-1)}{n(n-1)}$	$\dfrac{p(n-p)}{n(n-1)}$
1	$\dfrac{p(n-p)}{n(n-1)}$	$\dfrac{p(p-1)}{n(n-1)}$

□

b. En déduire la loi marginale de X_2.

Solution. Comme elle ne prend que la valeur 0 ou 1, X_2 est une loi de Bernoulli dont il suffit de déterminer le paramètre, ce qu'on fait grâce à la loi conjointe ci-dessus et la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{[X_1 = 0],\ [X_1 = 1]\}$.

$$P(X_2 = 1) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) = \frac{p(p-1)}{n(n-1)} + \frac{p(n-p)}{n(n-1)} = \frac{p}{n}.$$

On a donc la même loi que X_1, à savoir $X_2 \sim \mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$. □

c. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Solution. On utilise la formule de la covariance

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

On connait déjà la valeur de $E(X_1) = E(X_2) = \dfrac{p}{n}$.

Observons alors que X_1X_2 est encore une Bernoulli (comme produit de deux Bernoulli, elle ne prend que les valeurs 1 ou 0). Ainsi, son espérance est égale à son paramètre et

$$E(X_1X_2) = P(X_1X_2 = 1) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{p}{n} \times \frac{p-1}{n-1}.$$

Il suit que

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{p}{n}\left(\frac{p-1}{n-1} - \frac{p}{n}\right) = -\frac{p(n-p)}{n^2(n-1)} < 0.$$

□

d. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Solution. On vient de calculer la covariance qui n'est pas nulle : les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes. □

On pourrait montrer mais, on **admet**, dans toute la suite, que toutes les variables X_i suivent la même loi $\mathcal{B}\left(\frac{p}{n}\right)$ (pour $1 \leq i \leq p$) et que, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]$ tel que $i \neq j$, que $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

6. a. Exprimer $A_{n,p}$ en fonction de $X_1, ..., X_p$.

Solution. Chacune des variables X_i valant 1 ou 0 selon que le ticket i est gagnant ou non. Il suit que leur somme prend donc la valeur du nombre de tickets gagnants achetés, c'est à dire que

$$A_{n,p} = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

□

b. Déduire de la question précédente la valeur de l'espérance de $A_{n,p}$.

Solution. Par linéarité de l'espérance, et en admettant que chaque X_i est une Bernoulli dont on connait le paramètre p/n (et donc l'espérance), on a

$$E(A_{n,p}) = p \times E(X_1) = \frac{p^2}{n}.$$

□

c. À l'aide de la Question **3.** et de la relation ci-dessus, montrer que

$$V(A_{n,p}) = \frac{p^2(n-p)^2}{n^2(n-1)}.$$

Solution. On utilise comme suggéré la Question **3.** et les calculs de covariance déjà réalisés. Observons d'abord que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$V(X_i) = \frac{p}{n}\left(1 - \frac{p}{n}\right) = \frac{p(n-p)}{n^2}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
V(A_{n,p}) &= \sum_{i=1}^{p} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p} \operatorname{Cov}(X_i, X_j) \\
&= pV(X_1) + 2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p} \operatorname{Cov}(X_1, X_2) \\
&= \frac{p^2(n-p)}{n^2} + 2 \times \frac{p(p-1)}{2} \times \left(-\frac{p(n-p)}{n^2(n-1)}\right) \\
&= \frac{p^2(n-p)}{n^2}\left(1 - \frac{p-1}{n-1}\right) \\
&= \frac{p^2(n-p)^2}{n^2(n-1)},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait, et qui fait plaisir. □

On observera qu'on a déterminé l'espérance et la variance de $A_{n,p}$ sans en déterminer la loi. Ce qu'on va quand même faire dans la (dernière) question ci-dessous.

7. Afin de déterminer la loi de $A_{n,p}$, on modélise l'expérience par un tirage *simultané* des p tickets dans l'urne qui en contient toujours n. Un tirage est donc un ensemble de p numéros de tickets, tous éléments (distincts) de $[\![1, n]\!]$.

a. Quel est dans ce cas le nombre total de tirages possibles?

Solution. Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir p tickets parmi n donc $\binom{n}{p}$ tirages possibles. □

b. Combien de ces tirages contiennent k tickets gagnants?

Solution. Il faut choisir les k tickets gagnants parmi p (ce qu'on peut faire de $\binom{p}{k}$ façons) puis choisir les $p-k$ autres tickets parmi les $n-p$ tickets perdants (ce qu'on peut faire de $\binom{n-p}{p-k}$ façons). Au final, il y a $\binom{p}{k} \times \binom{n-p}{p-k}$ tirages qui contiennent exactement k tickets gagnants. □

c. Déterminer la loi de $A_{n,p}$. Comparez les résultats des Questions **2.b.** et **6.b.**

Solution. Soit $k \in [\![0, p]\!]$. La probabilité d'acheter exactement k tickets gagnants est donc le quotient du nombre de tirages contenant exactement k tickets gagnants sur le nombre total de tirages, c'est à dire

$$P(A_{n,p} = k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}}.$$

On retrouve bien la formule de la loi hypergéométrique, on a bien

$$A_{n,p} \sim H\left(p, \frac{p}{n}, n\right).$$

La Question **2.b.** permet de retrouver que $E(A_{n,p}) = \frac{p^2}{n}$, ce qu'on a aussi obtenu par linéarité de l'espérance à la Question **6.b.** □

Exercice 1

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On considère la matrice aléatoire M définie comme suit.
Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Solution. Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$M(\omega) \text{ inversible } \iff \det(M(\omega)) \neq 0 \iff X(\omega)^2 - Y(\omega)^2 \neq 0 \iff (X(\omega)-Y(\omega))(X(\omega)+Y(\omega)) \neq 0.$$

Mais

$$(X(\omega)-Y(\omega))(X(\omega)+Y(\omega)) = 0 \iff X(\omega)-Y(\omega) = 0 \text{ ou } X(\omega)+Y(\omega)=0 \iff X(\omega)-Y(\omega)=0$$

car, X et Y suivant des lois géométriques, on a $X(\Omega) = Y(\Omega) = N^*$ et par conséquent $X(\omega)+Y(\omega) \neq 0$.
Par la formule des probabilités totales, appliquée au système complet d'évènements $\{[X=k] : k \in \mathbb{N}^*\}$,

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X=Y] \cap [X=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([Y=k] \cap [X=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([Y=k])\, P([X=k]) && \text{car } X \perp\!\!\!\perp Y \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 \left((1-p)^2\right)^{k-1} && \text{car } X \sim Y \sim \mathcal{G}(p) \\ &= p^2 \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(M \text{ inversible}) = 1 - P(X=Y) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

□

2. Montrer que, presque sûrement, M est diagonalisable.

Solution. Si on connait le résultat (qui sera énoncé dans le **Chapitre 15**), on peut le citer : pour tout $\omega \in \Omega$, $M(\omega)$ est symétrique réelle donc diagonalisable. Mais ce résultat n'ayant pas encore été introduit, on va, dans ce cas particulier, le redémontrer.
Soit $\omega \in \Omega$. Le polynôme caractéristique de $M(\omega)$ est donné par

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2X(\omega)\lambda + X(\omega)^2 - Y(\omega)^2.$$

Son discriminant vaut

$$\Delta = 4X(\omega)^2 - 4X(\omega)^2 + 4Y(\omega)^2 = (2Y(\omega))^2 > 0$$

car comme précédemment $Y(\omega) \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $M(\omega)$ admet deux racines (réelles) distinctes et est donc diagonalisable.
Ce raisonnement étant valide pour tout $\omega \in \Omega$, la probabilité que M soit diagonalisable vaut 1. □

3. Soient alors λ_1 et λ_2 les variables aléatoires égales aux valeurs propres de M.
Calculer $\mathrm{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Solution. Le produit des valeurs propres est égal au déterminant de M. Il suit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\lambda_1,\lambda_2) &= E(\lambda_1\lambda_2) - E(\lambda_1)E(\lambda_2) \\ &= E(X^2 - Y^2) - E(\lambda_1)E(\lambda_2) \\ &= E(X^2) - E(Y^2) - E(\lambda_1)E(\lambda_2) \end{aligned}$$

Or, $X \sim Y$ donc $X^2 \sim Y^2$. Il s'agit de lois géométriques admettant espérance et variance (donc moment d'ordre 2).
Ainsi $E(X^2) = E(Y^2)$ donc $E(X^2) - E(Y^2) = 0$. Il suit que

$$\mathrm{Cov}(\lambda_1,\lambda_2) = -E(\lambda_1)E(\lambda_2).$$

Les calculs réalisés à la question précédente permettent en fait d'exprimer λ_1 et λ_2 en fonction de X et Y. Sans perte de généralité, on a

$$\lambda_1 = X - Y, \quad \lambda_2 = X + Y.$$

Comme $E(X) = E(Y)$, on a $E(\lambda_1) = 0$ et donc

$$\mathrm{Cov}(\lambda_1,\lambda_2) = 0.$$

On prendra garde au fait que, bien que non corrélées, ces deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes :

$$P([\lambda_1 = 2] \cap [\lambda_2 = 2]) = 0 \neq P(\lambda_1 = 2)P(\lambda_2 = 2)$$

car $P(\lambda_1 = 2) \geq P([X=3] \cap [Y=2]) > 0$ et $P(\lambda_2 = 2) \geq P([X=1] \cap [Y=1]) > 0$. □

Exercice 2

On s'intéresse à la suite de polynômes (T_n), appelés *polynômes de Tchebychev*[1], définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. a. Expliciter T_2 et T_3.

Solution. On a immédiatement en appliquant la relation de récurrence

$$T_2 = 2X^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad T_3 = 4X^3 - 3X.$$

□

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n.

Solution. On va montrer par une récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n.

✗ Initialisation: On voit, d'après la question précédente, que, pour $n \in \{1, 2, 3\}$, T_n est bien de degré n.

✗ Hérédité: Soit $n \geqslant 2$. On suppose que T_n est de degré n de monôme dominant $a_n X^n$ et que T_{n-1} est de degré $n-1$. Ainsi T_n peut s'écrire $T_n = a_n X^n + Q_n(X)$ où Q_n est de degré inférieur ou égal à $n-1$. On a alors

$$T_{n+1} = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) = 2a_n X^{n+1} + 2XQ_n - T_{n-1}$$

$2XQ_n(X) - T_{n-1}(X)$ est une somme de polynômes de degré inférieurs ou égaux à n, son degré est donc inférieur ou égal à n. On a donc écrit T_{n+1} sous la forme d'un monôme de degré $n+1$ $2a_n X^{n+1}$ plus un polynôme de degré strictement plus petit que $n+1$. Son degré est alors $n+1$.
On a ainsi prouvé par récurrence que, pour tout entier n, T_n est un polynôme de degré n.

□

c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, T_1, ..., T_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution. On vient de prouver que, pour $k \in \mathbb{N}$, T_k est de degré k. Ainsi la famille $(T_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille de polynômes de degrés deux-à-deux distincts de $\mathbb{R}_n[X]$, elle est donc libre. Il s'agit d'une famille libre de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. □

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

Solution. On va procéder par récurrence double sur n.

✗ Initialisation: pour $n = 0$ et $n = 1$ on a, de manière évidente

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

✗ Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout réel x, on a

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad T_{n-1}(\cos(x)) = \cos((n-1)x).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors, par formule usuelle d'addition du cos,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(x)) &= 2\cos(x)T_n(\cos(x)) - T_{n-1}(\cos(x)) \\ &= 2\cos(x)\cos(nx) - \cos((n-1)x) \\ &= \cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) - \cos((n-1)x) \\ &= \cos((n+1)x). \end{aligned}$$

On a ainsi montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

□

3. a. Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente.

On pourra raisonner en traitant séparément le cas où $PQ(1) \neq 0$ et le cas où $PQ(1) = 0$ (même chose en -1).

[1] Déja rencontrés dans le **Devoir Surveillé n°2**

Solution. Soit $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est impropre en -1 et en 1.

Étudions d'abord l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Supposons dans un premier temps que $P(1)Q(1)\neq 0$, alors

$$\left|P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right|=\left|P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}\right|\underset{t\to1}{\sim}\left|\frac{P(1)Q(1)}{2}\right|\frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente.

Ainsi, par théorème de comparaison pour les intégrales des fonctions positives l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

Supposons maintenant que $P(1)Q(1)=0$, on ne peut plus travailler par équivalence car rien n'est équivalent à 0.

Le polynôme PQ admet 1 comme racine, on peut donc le factoriser par $X-1$, ainsi, il existe un polynôme R tel que $PQ=(X-1)R$. Alors, pour $t\in[0,1[$,

$$P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=R(t)\frac{t-1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}}=\frac{-R(t)\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}.$$

La fonction $t\mapsto\frac{-R(t)\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$ est prolongeable par continuité en 1, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est ainsi faussement impropre en 1 et donc converge.

On procède de manière analogue pour étudier l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Finalement pour tout $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

$\square$

b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
On notera $\langle .,.\rangle$ ce produit scalaire et $\|.\|$ la norme associée.

Solution. Montrons que cette application vérifie les conditions de la définition.

- ✗ Soit λ un réel et soient P, Q et R trois éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales étant convergentes)

$$\begin{aligned}\langle P,Q+\lambda R\rangle&=\int_{-1}^{1}P(t)\left(Q(t)+\lambda R(t)\right)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{1}\left(P(t)Q(t)+\lambda P(t)R(t)\right)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t+\lambda\int_{-1}^{1}P(t)R(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\&=\langle P,Q\rangle+\lambda\langle P,R\rangle\end{aligned}$$

  Ainsi l'application $(P,Q)\mapsto\langle P,Q\rangle$ est linéaire à droite

- ✗ Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, on a alors

$$\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}Q(t)P(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t=\langle Q,P\rangle$$

Ainsi l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle$ est symétrique, comme elle est linéaire à droite elle est donc aussi linéaire à gauche et donc bilinéaire.

✗ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\forall t \in]-1,1[, P(t)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale, on a

$$\langle P,P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Ainsi l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle$ est positive.

✗ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ telle que $\langle P,P \rangle = 0$. On sait que

$$\forall t \in]-1,1[, P(t)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \geqslant 0$$

et que la fonction $t \mapsto P(t)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est **continue** sur $]-1,1[$.
Une fonction continue et positive d'intégrale nulle est nulle sur l'intervalle d'intégration, ainsi

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad P(t)^2 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 0$$

D'où,

$$\forall t \in]-1,1[, \qquad P(t) = 0$$

P admet donc une infinité de racines donc c'est le polynôme nul, c'est-à-dire $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.
Ainsi l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle$ est définie positive.

Finalement l'application $(P,Q) \mapsto \langle P,Q \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

□

c. Montrer que, pour tout couple $(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \neq m$, on a : $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.
On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$.

Solution. Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ deux entiers naturels distincts.
On va considérer le changement de variable $t = \cos(x)$. Soit $\psi :]0,\pi[\to]-1,1[, \ x \mapsto \cos(x)$.

ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante sur $]0,\pi[$, le changement de variable est donc licite. Pour $x \in]0,\pi[$ on a $\psi'(x) = -\sin(x)$.

De plus, pour $x \in]0,\pi[$ on a $\sin(x) \geqslant 0$ ainsi

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad \sin(x) = \sqrt{\sin(x)^2} = \sqrt{1-\cos(x)^2} = \sqrt{1-\psi(x)^2}.$$

D'où

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad \psi'(x) = -\sqrt{1-\psi(x)^2}.$$

Il suit que $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ et

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^{1} T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\pi}^{0} T_n(\cos(x)) T_m(\cos(x)) \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} T_n(\cos(x)) T_m(\cos(x)) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_0^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi les polynômes T_n et T_m sont bien orthogonaux. La famille $(T_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire. □

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que:

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n \geqslant 1 \\ \pi, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Solution. Les calculs précédents nous donnent, pour $n = m$ et $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle T_n, T_n \rangle &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2nx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et pour $n = m = 0$

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Ainsi,

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n > 1 \\ \pi, & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

□

e. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

Solution. La famille $(T_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de la renormaliser pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

D'après la question précédente, on en déduit que la famille $\left(\dfrac{T_0}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_1, \cdots, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_n\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

□

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$\mathrm{d}_n = \inf\left\{\|X^n - P\| : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\right\}.$$

a. Montrer alors que : $\mathrm{d}_n = \dfrac{|\langle X^n, T_n\rangle|}{\|T_n\|}$.

Solution. D'après le cours, la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est réalisée par le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, *i.e* $\|X^n - Q\| = \inf\{\|X^n - P\|,\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$ si et seulement si Q est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'après la question précédente, $\left(\dfrac{T_0}{\|T_0\|}, \dfrac{T_1}{\|T_1\|}, \cdots, \dfrac{T_{n-1}}{\|T_{n-1}\|}\right)$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, ainsi le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ s'exprime :

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1}\left\langle X^n, \frac{T_k}{\|T_k\|}\right\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|} = \sum_{k=0}^{n-1}\langle X^n, T_k\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}.$$

Observons que, la famille $\left(\dfrac{T_k}{\|T_k\|}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ formant une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$, on a aussi

$$X^n = \sum_{k=0}^{n}\langle X^n, T_k\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}.$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_n &= \|X^n - Q\| \\ &= \left\|X^n - \sum_{k=0}^{n-1}\langle X^n, T_k\rangle \frac{T_k}{\|T_k\|^2}\right\| = \left\|\langle X^n, T_n\rangle \frac{T_n}{\|T_n\|^2}\right\| = \frac{|\langle X^n, T_n\rangle|}{\|T_n\|} \end{aligned}$$

, ce qui est la formule attendue. □

b. Déterminer en particulier la valeur de d_2.
On commencera par exprimer X^2 *en fonction de* T_2, T_1 *et* T_0.

Solution. D'après la question précédente, $\mathrm{d}_2 = \dfrac{|\langle X^2, T_2\rangle|}{\|T_2\|}$.

Or, $X^2 = \dfrac{2X^2-1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}T_2 + \dfrac{1}{2}T_0$, ainsi

$$\langle X^2, T_2\rangle = \frac{1}{2}\langle T_2, T_2\rangle + \frac{1}{2}\langle T_0, T_2\rangle = \frac{1}{2}\|T_2\|^2.$$

Il suit que

$$\mathrm{d}_2 = \frac{\frac{1}{2}\|T_2\|^2}{\|T_2\|} = \frac{1}{2}\|T_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Finalement,

$$\mathrm{d}_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

□

●