Math PT. 2024 - 2025

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

0 Remise en route (Révisions)

On propose, sous forme d'exercices parfois agrémentés de rappels de cours (ou sinon à ajouter soi-même dans sa prise de notes !), une remise en route qui reprend quelques uns des éléments du cours de première année.
Il serait naïf de penser que cet amuse-bouche aux chapitres qui arrivent propose une quelconque exhaustivité de ce qu'il est nécessaire d'avoir retenu ou de savoir faire.
On aura naturellement conservé les cours de première année dans lesquels on se replongera autant que besoin.
On a choisi de commencer par des rappels d'analyse car les notions qui suivent seront constamment utilisées.

1 Trigonométrie

☞ Le formulaire qui suit doit être connu sur le bout des doigts, ou sinon on doit être capable d'en retrouver très rapidement tous les éléments sur un coin de brouillon.

La plupart des formules qui suivent sont valables pour tous réels x et y, exceptées celles mettant en jeu des tangentes, où il faudra veiller à ce que tous les termes soient définis. Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + y^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \cos(\theta) \\ y & = & \sin(\theta) \end{array} \right.$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

ce qui donne aussi immédiatement, pour tout $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2} [\pi]$, $1 + \tan^2(\theta) = \dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |\cos(\theta)| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |\sin(\theta)| \leqslant 1.$$

Proposition 1. **Valeurs particulières**

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition 2. **Propriétés de symétrie du cercle trigonométrique**

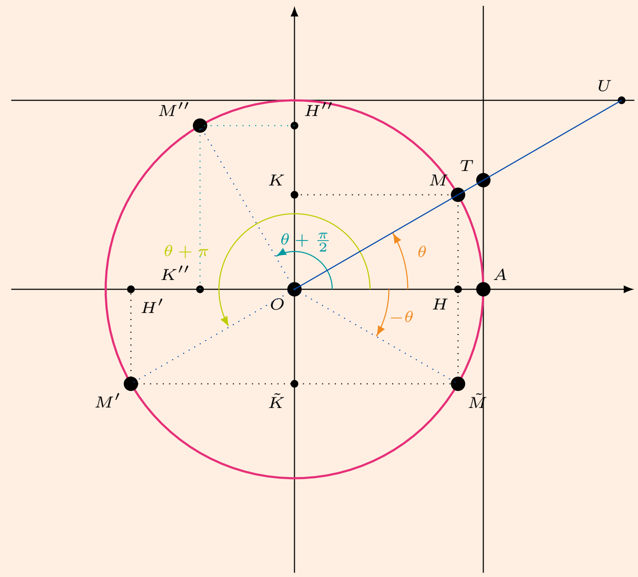
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta) \qquad \sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta) \qquad \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \qquad \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$
$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta) \qquad \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$



☞ Sur la figure,

$$\cos(\theta) = \overline{OH},\ \sin(\theta) = \overline{OK},\ \tan(\theta) = \overline{AT}$$

$$\tilde{M} = \mathcal{S}_{(OA)}(M),\ M' = \rho_{0,\pi}(M),\ M'' = \rho_{0,\frac{\pi}{2}}(M),$$
$$\tilde{K} = \mathcal{S}_{(OA)}(K),\ H' = \rho_{0,\pi}(H) = \mathcal{S}_{(OK)}(H),\ H'' = \rho_{0,\frac{\pi}{2}}(H),\ K'' = \rho_{0,\frac{\pi}{2}}(K).$$

Proposition 3. **Formules d'addition**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout couple (x, y) tel que les quantités qui suivent sont bien définies (celles faisant intervenir une tangente), on a :

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \sin(x - y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$
$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \qquad \tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

☞ Ces formules se retrouvent facilement en identifiant parties réelles et parties imaginaires dans la relation $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$.

Corollaire 1.

Soient α et β deux réels non nuls. Si l'on pose $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, alors il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \alpha\cos(\theta) + \beta\sin(\theta) = r\cos(\theta - \varphi).$$

Exercice 1. **Extrait du cahier de vacances**

Résoudre l'équation $1 + \sin(x) - \cos(x) = 0$.

Proposition 4. **Formules de duplication**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \qquad \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$
$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$$
$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) \qquad \tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)} \quad \left(\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \ \text{ et } \ \theta \not\equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Proposition 5. **Formules de linéarisation**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)$$
$$\tan^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)} \qquad \sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)$$

Proposition 6. **Formules de factorisation**

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \qquad \sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$\tan(a)+\tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)} \qquad \tan(a)-\tan(b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

Exercice 2. **Extrait du cahier de vacances**

Résoudre sur $\mathbb{R}$, puis sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\cos(x)+\cos(3x) = 0$.

Proposition 7. **Dérivées des fonctions trigonométriques**

Les fonctions cosinus, sinus et tangentes sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition. Pour tout réel x, on a :

$$\cos'(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \qquad \sin'(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x) \qquad \left(x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right)$$

☞ On parlera à nouveau des fonctions trigonométriques (et des fonctions trigo inverses) dans le **Chapitre 2**.

2 Sommes, Produits

Définitions

Définition 1. **Symboles Σ et Π**

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est définie récursivement par:

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1}.$$

De manière analogue, la quantité $\prod_{k=0}^{n} a_k$ est définie récursivement par:

$$\prod_{k=0}^{0} a_k = a_0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right) \times a_{n+1}.$$

Remarque 1.
Soit $p \in \mathbb{N}$, $I = \{i_0, \dots, i_p\}$ un ensemble fini d'entiers, et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit alors la quantité $\sum_{i\in I} a_i$ comme étant la somme $\sum_{k=0}^{p} a_{i_k} = a_{i_0} + \cdots + a_{i_p}$.
Cela permet par exemple de définir $\sum_{k\in\{2p;\ p\in[\![0,m]\!]\}} a_k$, qui est la somme des $m+1$ premiers termes d'indice pair de la suite (a_n), c'est-à-dire $a_0 + a_2 + \cdots + a_{2m}$. En pratique, on préférera la notation $\sum_{k=0}^{m} a_{2k}$.
On a la même chose pour les produits.

☞ Par convention, on pose pour toute suite (a_k):

- ✗ Si $n < 0$, $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i\in\emptyset} a_i = 0$.
- ✗ Si $n < 0$, $\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{i\in\emptyset} a_i = 1$.

Définition 2. **Factorielle d'un entier**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **factorielle** de n, et on note $n!$ la quantité

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

En particulier, $0! = 1$.

2.1 Quelques formules

Proposition 8. **Somme des (puissances des) premiers entiers**
Pour tout entier n, on a

$$(i)\ \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (iii)\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 3. **Extrait du cahier de vacances**
Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1)$. On vérifiera le résultat obtenu par récurrence

Proposition 9. **Sommes télescopiques**
Soient n un entier et (a_k) une suite de complexes. On a $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1} - a_0$.

Exercice 4.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

Proposition 10. **Somme des premiers termes d'une suite géométrique**
Soit x un nombre complexe. Pour tout entier n, on a $\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Proposition 11.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z, a, b \in \mathbb{C}$. On a alors les résultats suivants.

$$(i)\ z^n - 1 = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k, \qquad (ii)\ a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Exercice 5.
Démontrer les deux formules de la Proposition précédente.

2.2 Coefficients binomiaux

Définition 3. **Coefficient binomial**

Soient $p \leqslant n$ des entiers. On appelle **coefficient binomial** p parmi n, et on note $\binom{n}{p}$ la quantité définie par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Proposition 12. **Propriétés algébriques des coefficients binomiaux**
Soient $p \leqslant n$ des entiers.

i. Les coefficients binomiaux vérifient une propriété de **symétrie** : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

ii. Ils vérifient la **formule du triangle de Pascal** : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 6. **Extrait du cahier de vacances**

Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p+1$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}$.

Proposition 13. **Formule du binôme de Newton**
Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a alors:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

☞ Comme on le rappellera au cours du **Chapitre 4**, on peut appliquer cette formule à deux matrices (resp. applications linéaires) **qui commutent**.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$, puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ dans le cas où $\theta \not\equiv 0\ [2\pi]$.

2.3 Sommation par paquets

Proposition 14. **Extrait du cahier de vacances**
Soit $E \subset \mathbb{C}$ et I des ensembles finis, ainsi qu'une partition $(E_i)_{i \in I}$ de E.

Alors, $\displaystyle\sum_{x \in E} x = \sum_{i \in I} \left(\sum_{x \in E_i} x \right)$.

Par exemple, si $I = [\![1, n]\!]$, on peut écrire $\displaystyle\sum_{x \in E} x = \sum_{x \in E_1} x + \cdots + \sum_{x \in E_n} x$.

Exercice 8.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $(1+i)^{4n}$, puis en déduire les valeurs de

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \quad \text{et de} \quad \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}.$$

2.4 Sommes doubles

On considère maintenant une suite de complexes $(a_{i,j})$ indexée par **deux indices** i et j. On cherche donc à écrire la somme de ses termes lorsque les deux indices parcourent un certain ensemble.
Ainsi, la *somme double*

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j}$$

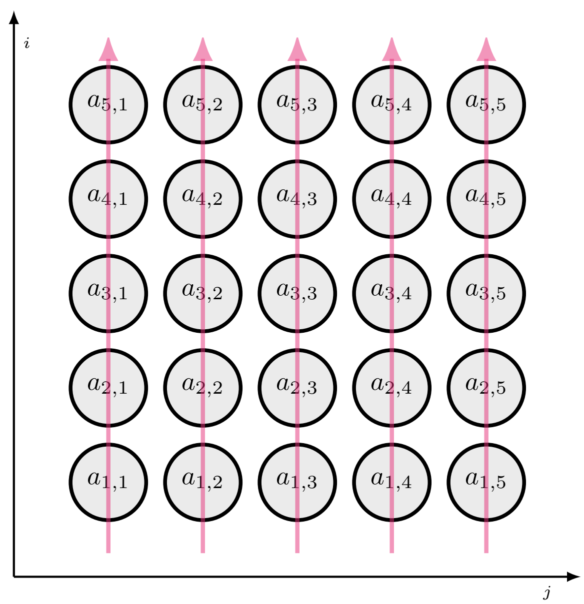
représente la somme de tous les termes $a_{i,j}$ dont le premier indice est compris entre 1 et n et dont le deuxième indice est compris entre 1 et m. Lorsque i et j parcourent le même ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$, la somme précédente s'écrira $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$.

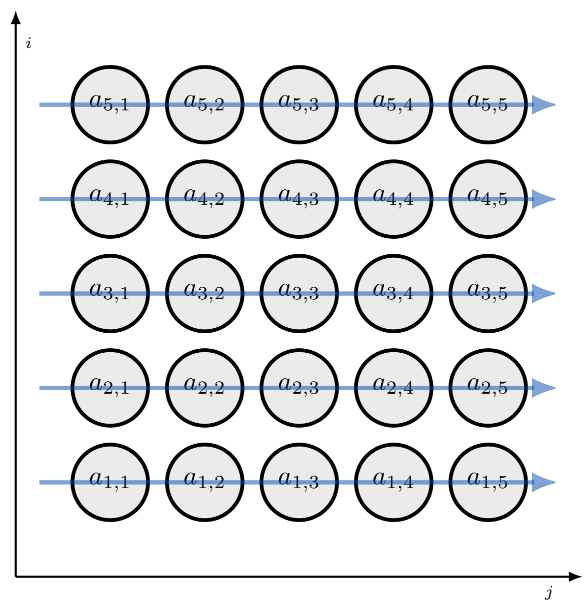
Méthode 1. **Permutation des indices de sommation**

Lorsque les indices ne dépendent pas l'un de l'autre, on peut permuter l'ordre de sommation, ce qui revient à lister les termes sommés dans un autre ordre.

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right).$$

Par exemple, pour $1 \leq i, j \leq 5$, on peut illustrer cette propriété avec le schéma suivant : $\sum\limits_{j=1}^{5}\sum\limits_{i=1}^{5} a_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5} a_{i,j}$.





Exercice 9.

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On cherche à calculer de deux manières différentes la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k$.

1. En écrivant $\sum\limits_{k=1}^{n} kx^k$ comme une somme double, répondre à la question posée.

2. Retrouver le résultat à partir de la formule de la s **Proposition 10**.

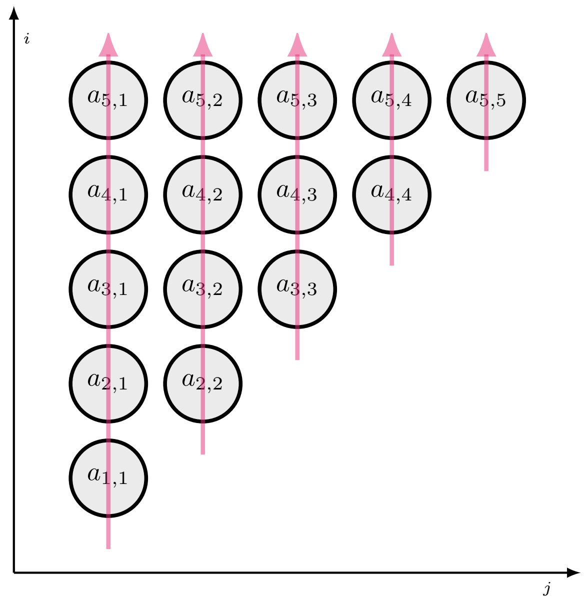
Exercice 10.

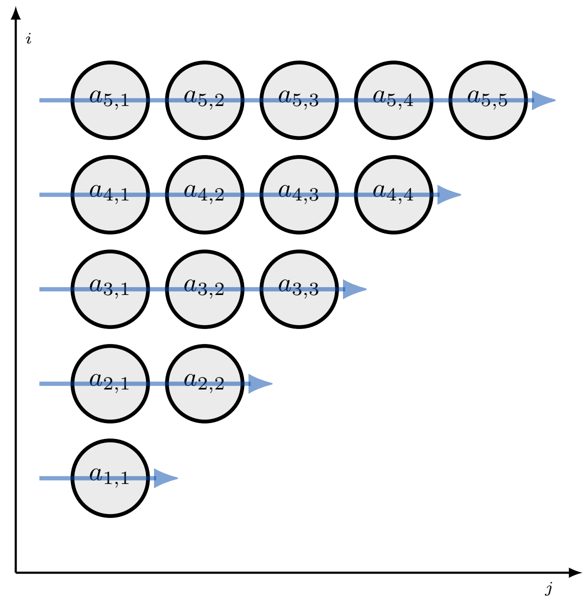
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i, j)$.

Méthode 2. **Permutation des indices de sommation, dépendance du deuxième indice**

Parfois, le deuxième indice varie en fonction du premier et l'ordre de sommation peut avoir une incidence sur la simplification des calculs. On fait donc attention à cette dépendance d'indices lors de la permutation de ceux-ci

$$1 \leq j \leq i \leq n \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq n \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i \end{array} \right.$$





$$\sum_{j=1}^{5} \sum_{i=j}^{5} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}.$$

Exemple 1.

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j} i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 11.

Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$.

3 Nombres complexes, Racines de l'unité

Exercice 12. **Extrait du cahier de vacances**

On pose $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$. Calculer$|z|$. Mettre z sous forme algébrique. Calculer z^{2024}.

Exercice 13. **Extrait du cahier de vacances**

Pour chacune des deux questions (indépendantes) suivantes, proposer une résolution par le calcul puis une autre résolution géométrique.

1. Déterminer les valeurs de z pour lesquelles z, $\dfrac{1}{z}$ et $1-z$ ont même module.

2. Trouver tous les nombres complexes z vérifiant $|z| = |z-4|$ et $\arg(z) = \arg(z+1+i)$.

Proposition 15. **Formules d'Euler**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Méthode 3. **Linéarisation d'une expression trigonométrique**

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour linéariser l'expression $\cos^p(x)\sin^q(x)$, on peut procéder comme suit.

1. On commence par utiliser les formules d'Euler :
$$\cos^p(x)\sin^q(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q.$$
2. On développe ensuite les expressions $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^p$ et $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^q$ à l'aide de la formule du binôme de Newton, puis on développe le produit de deux facteurs ainsi obtenu.
3. Enfin, il suffit de remarquer que la somme obtenue fait apparaître des couples de termes conjugués : grâce encore une fois à la formule d'Euler on peut ne faire apparaitre que des cosinus et des sinus.

Exercice 14. **Extrait cahier de vacances**

Linéariser $\cos^4(x)$.

Proposition 16. **Formule de Moivre**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.

Méthode 4.

La formule de Moivre ci-dessus, combinée la formule du binôme et une identification des parties réelles et imaginaires permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction des puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$)

$$\cos(n\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)(i\sin(\theta))^k, \qquad \sin(n\theta) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)(i\sin(\theta))^k.$$

Exercice 15.

Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

3.1 Racines de l'unité

Dans cette section, on considère un entier naturel non nul n.

Définition 4. **Racines de l'unité**

On appelle **racine n-ième de l'unité**toute solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. On note alors $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} : \ z^n = 1\}.$$

Proposition 17.

On a les résultats suivants :

i. $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ : \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

ii. $\mathbb{U}_n$ contient exactement n éléments.

iii. Posons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On peut alors écrire $\mathbb{U}_n = \{\omega^k : \ k \in [\![0, n-1]\!]\}$.

Proposition 18. **Somme des racines $n-$ièmes de l'unité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On a

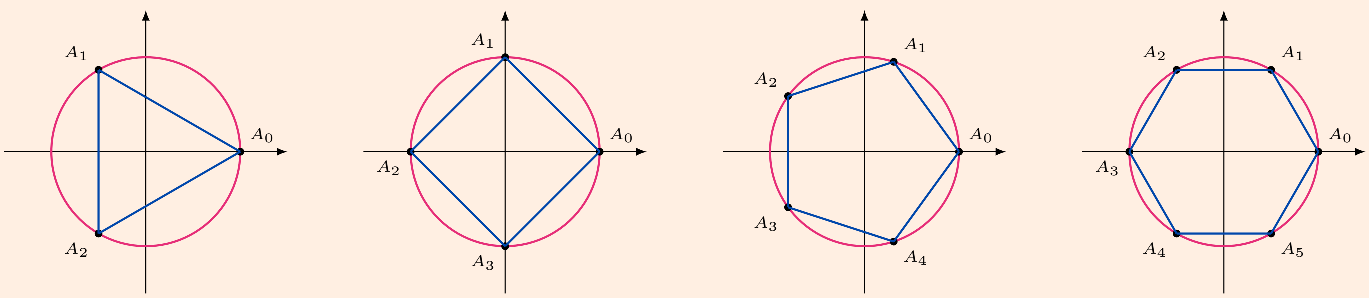
$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}.$$

Exemple 2.

On a $\mathbb{U}_1 = \{1\}$, $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
De plus, on a $j^2 = j^{-1} = \overline{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

Proposition 19. **Polygones réguliers associés aux racines $n-$ièmes de l'unité**

Pour $n \geqslant 3$, les points dont l'affixe est dans $\mathbb{U}_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.



$\mathbb{U}_3$ $\mathbb{U}_4$ $\mathbb{U}_5$ $\mathbb{U}_6$

Définition 5.

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que z est une racine n-ième de a si $z^n = a$.

Proposition 20. **Racines d'un complexe non nul**

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Alors :

i. a admet exactement n racines n-ièmes.
ii. Si b est une racine n-ième quelconque de a, alors l'ensemble des racines n-ièmes de a est :

$$\{z \in \mathbb{C}^* :\ z^n = a\} = \{bz :\ z \in \mathbb{U}_n\} = \left\{be^{\frac{2ik\pi}{n}} :\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}.$$

☞ Pour obtenir toutes les racines n-ièmes d'un complexe $a \in \mathbb{C}^*$, il suffit donc d'en déterminer une, puis de multiplier celle-ci par toutes les racines n-ème de l'unité.

Exercice 16. **Extrait du cahier de vacances**

Déterminer les racines cubiques de $-8i$.

4 Polynômes

4.1 Généralités

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à cœfficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur (ou égal) à n.

Remarque 2.

Dans la suite la lettre X ne désigne pas une variable, mais une *indéterminée*. Il n'aurait ainsi aucun sens d'écrire par exemple une formule commençant par $\forall X \in \mathbb{K}$, ou d'écrire "prenons $X = 1$".

Proposition 21. **Théorème d'identification des cœfficients**

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes cœfficients.

☞ En particulier, un polynôme est nul si et seulement si tous ses cœfficients sont nuls.

Exercice 17. **Formule de Vandermonde**

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P(X) = (X+1)^n$.

1. En calculant de deux manières différentes le polynôme P^2, montrer que :

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}.$$

2. En déduire la *formule de Vandermonde*: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

Théorème 1. **Division euclidienne sur les polynômes**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$(i)\ A = BQ + R, \qquad (ii)\ \deg(R) < \deg(B).$$

On dit alors que Q est le **quotient** et R le **reste** de la division euclidienne de A par B.

Exercice 18.

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^4 - 1$ par $X - 1$.

Exercice 19.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4 + x - 1}{x^2 + 1} \mathrm{d}x$.

☞ Des rappels d'intégration apparaîtront au **Chapitre 5**.

Définition 6.

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B **divise** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

☞ Il est clair que B divise A si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

4.2 Racines d'un polynôme

Définition 7. **Racine d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une **racine** (ou est **un zéro**) de P si $P(\alpha) = 0$.

Théorème 2. **Caractérisation des racines d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i. α est une racine de P.
ii. $(X - \alpha)$ divise P.
iii. $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X - \alpha)Q(X)$.

Définition 8. **Ordre d'une racine**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$. On dit que α est une **racine d'ordre** k de P si $(X - \alpha)^k$ divise P et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P. L'entier k est alors appelé **l'ordre de multiplicité** de α.

Théorème 3. **Caractérisation des racines de multiplicité k d'un polynôme**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i. α est une racine de multiplicité k de P.
ii. $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.
iii. $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $P^{(i)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

4.3 Nombre de racines d'un polynôme

Théorème 4.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors P admet au plus n racines distinctes.

Corollaire 2.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P, comptées avec multiplicité, est inférieur ou égal à n.

C'est-à-dire que si $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des racines de P de multiplicité respective $m_1, \dots, m_r$, on a $\sum_{k=1}^{r} m_k \leqslant n$.

Corollaire 3.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si P admet au moins $n+1$ racines distinctes, alors $P = 0$.

☞ On en déduit que *tout polynôme admettant une infinité de racines distinctes est nul.*

Corollaire 4.

Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ des scalaires deux à deux distincts. Si, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

☞ Deux polynômes qui coïncident en un nombre de points strictement supérieur à leur degré coïncident partout.

4.4 Polynômes scindés

Définition 9. **Polynôme scindé**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est **scindé sur** $\mathbb{K}$ lorsque P est constant ou lorsque il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ (pas nécessairement distinctes) tels que :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i).$$

En d'autres termes, un polynôme est scindé s'il peut se décomposer comme produit de polynômes de degré 1.

Exemple 3.

$X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5. **Théorème de d'Alembert-Gauss**

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 admet au moins une racine complexe.

Preuve. Résultat admis. □

Théorème 6.

Tout polynôme à cœfficients complexes est scindé sur $\mathbb{C}$.

Remarque 3.

Tout polynôme à cœfficients complexes peut alors se mettre sous la forme $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$, où $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ est l'ensemble des racines de P, λ est son cœfficient dominant, et m_i est la multiplicité de α_i en tant que racine de P. Cette écriture est alors unique à l'ordre des facteurs près.

Exercice 20. **Extrait du cahier de vacances**

Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 4.

On voit sur cet exemple que tout polynôme à cœfficients réels, à défaut d'être scindé, se décompose comme un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.

4.5 Relations cœfficients racines

Proposition 22.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$, avec $a \neq 0$, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i. α et β sont les racines de P.

ii. $P(X) = a(X - \alpha)(X - \beta)$.

iii. $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ et $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$.

☞ On retrouve le résultat suivant: a et b sont racines de $X^2 - SX + P$, où $S = a + b$ et $P = ab$.

On a enfin le résultat suivant, pour les polynômes de degré supérieur.

Proposition 23.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, avec $a_n \neq 0$ un polynôme scindé et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P. Alors :

$$(i)\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \qquad (ii)\ \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

5 Suites numériques

5.1 Convergence des suites

Définition 10. **Limite d'une suite**

- ✗ On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers l'infini**, ce que l'on notera $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, si elle vérifie :
$$\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A.$$
- ✗ On dit qu'une suite (u_n) **diverge vers moins l'infini**, ce que l'on notera $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, si elle vérifie :
$$\forall A < 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < A$$
- ✗ Soit (u_n) une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) **converge vers** ℓ, ce que l'on note $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, si elle vérifie
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Proposition 24. **Prolongement des inégalités**

Soient a, b des réels, et (u_n) une suite convergente telle qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant:
$$\forall n \geqslant n_0,\ a < u_n < b.$$
Alors
$$a \leqslant \lim_{n \to +\infty} u_n \leqslant b.$$

Théorème 7. **Théorème de la limite monotone**

Soit (u_n) une suite réelle monotone.

- ✗ Si (u_n) est croissante, alors:
  i. si la suite est majorée, elle possède une limite finie ℓ;
  ii. sinon, elle tend vers $+\infty$.

  Et dans le cas où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell$.
- ✗ Si (u_n) est décroissante, alors:
  i. si la suite est minorée elle possède une limite finie ℓ;
  ii. sinon, elle tend vers $-\infty$.

  Et dans le cas où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant \ell$.

☞ Toute suite monotone possède donc une limite, finie ou infinie.

Définition 11.

On dit que deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, si

- ✗ l'une de ces deux suites est croissante et l'autre est décroissante;
- ✗ la différence des deux termes généraux tend vers 0 : $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Théorème 8. **Suites adjacentes**

Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes. Alors elles convergent toutes les deux et ont même limite.

Exercice 21. **Irrationalité de e et suites adjacentes**

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$
sont adjacentes.
2. En déduire que e est irrationnel.

Définition 12. **Suite extraite**

Étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on appelle **suite extraite** de (u_n) ou **sous-suite** de (u_n) toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.

☞ Une sous-suite d'une suite (u_n) est donc une suite obtenue en ne conservant que certains des termes de (u_n), extraits dans l'ordre.

Proposition 25.

Si une suite (u_n) possède une limite, alors toute suite extraite de (u_n) possède la même limite.

Théorème 9.

Soit (u_n) une suite, et ℓ qui est soit un réel soit égal à $\pm\infty$. On a alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \begin{cases} u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \\ u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \end{cases}$.

Théorème 10. **Encadrement et comparaison**

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Alors

i. Si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n$, $u_n \leqslant v_n$ et que (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge aussi vers $+\infty$.

ii. Si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n$, $u_n \leqslant v_n$ et que (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) diverge aussi vers $-\infty$.

iii. Si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n$, $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ et que (w_n) et (v_n) convergent vers une même limite finie ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.

Exercice 22.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

5.2 Suites usuelles

Exercice 23.

Dans chacun des cas suivants, déterminer u_n en fonction de n. On en profitera pour rappeler la méthode.

1. $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$
2. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0$.
3. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

Exercice 24. **Extrait du cahier de vacances**

Écrire une fonction en langage `Python`, prenant en argument un entier n, permettant de calculer le terme u_n où la suite (u_n) est définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$
Déterminer ensuite l'expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de u_n.

5.3 Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Méthode 5. **Étude suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ - avec f croissante**

Pour étudier une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on suit les étapes ci-contre :

- ✗ On étudie brièvement les variations de f sur son ensemble de définition ;
- ✗ On vérifie que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie (il n'y a pas de terme u_n qui tombe en dehors du domaine de définition de f pour un certain n, rendant impossible le calcul des termes suivants).
  Pour ce faire, en général on montre une condition plus restrictive, souvent que la suite est bornée (tous les termes sont dans un certain intervalle, stable par f) par récurrence.
- ✗ On étudie les variations de la suite.
  Pour ce faire, si f est croissante, on peut utiliser une récurrence, si l'on connait les deux premiers termes de la suite (pour initialiser la récurrence) - les autres termes seront rangés dans le même ordre.
  Sinon, on étudie le signe de $f(x) - x$.

  ☠ Attention, écrire que la suite est croissante car la fonction est croissance est une hérésie. Une fonction croissante peut générer une suite croissante ainsi qu'une suite décroissante (selon la localisation du premier terme).
  Par contre, une fonction croissante génère toujours une suite **monotone**.

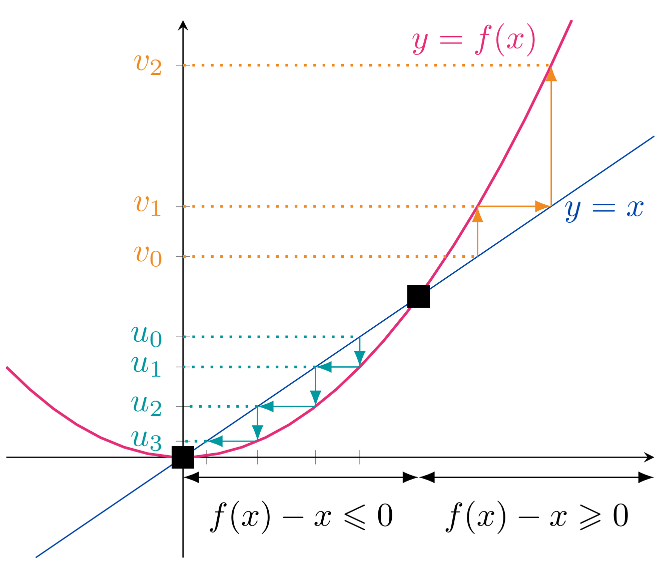
- ✗ On utilise le **théorème de convergence monotone** pour justifier de la convergence de la suite vers une certaine limite ℓ (qu'on ne connait pas à ce stade) qui se trouve dans le même intervalle (**fermé**) que les termes de la suite.

- ✗ On utilise la continuité de f au voisinage de ℓ pour obtenir l'équation de point fixe vérifié par ℓ (à savoir $f(\ell) = \ell$) et déterminer la valeur de ℓ.
  Les points fixes de f sont les seules valeurs possibles pour une limite finie (lorsque f est continue).

☞ Lorsque f est décroissante, on peut parfois utiliser l'inégalité des accroissements finis pour obtenir (lorsque f est contractante) une inégalité du type $|u_{n+1} - \ell| \leqslant q|u_n - \ell|$ puis, à l'aide d'une récurrence $|u_n - \ell| \leqslant q^n[u_0 - \ell|$ et conclure avec le théorème des gendarmes. On rappelle le résultat ci-après.

Une autre méthode est d'étudier les suites extraites de rangs pairs et impairs qui seront elles monotones. Si elles convergent vers une même limite, (u_n) est convergence vers cette limite.

Exemple 4. **Suite récurrente et schéma en escalier**



Sur l'exemple ci-contre,

- ✗ f est (continue et) croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- ✗ Les points fixes, donc limites finies éventuelles pour une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ sont $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.
- ✗ $f(x) - x \leqslant 0$ sur $[0, 4]$. Si on prend un premier terme $u_0 \in [0; 4]$, tous les termes de la suite sont dans le même intervalle (stable par f) et la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ générée est **décroissante**. On voit qu'elle converge vers $\ell = 0$.
- ✗ $f(x) - x \geqslant 0$ sur $[4, +\infty[$. Si on prend un premier terme $v_0 > 4$, alors tous les termes de la suite donc dans ce même intervalle (stable par f) et la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ générée est **croissante**. On montre par l'absurde qu'elle ne peut pas converger (car $v_n \geqslant v_0 > 4$) donc elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 25.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\ln(1+x)$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. **a.** Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0;+\infty[$ et calculer, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   b. En déduire les variations de f.

2. **a.** Étudier le signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. On suppose dans cette question : $u_0 \in]e-1;+\infty[$.
   a. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e-1 < u_n \leq u_{n+1}$.
   b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

4. On suppose, dans cette question : $u_0 \in]0;e-1[$.
   Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 26.

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in [1;3]$.
2. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle monotone?
3. Montrer que (u_{2n}) est croissante et que (u_{2n+1}) est décroissante.
4. Conclure quant à la nature de la suite (u_n).

☞ Dans le cas où la fonction f serait contractante (qu'elle soit croissante ou non), on peut utiliser le résultat suivant. Il donne une information sur la vitesse de convergence (qui est sous-géométrique) et permet notamment l'écriture de script en `Python` pour obtenir une valeur approchée de la limite.

Théorème 11. **Suites récurrentes et fonction contractante**

Soient $q \in [0,1[$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ dérivable telle que $\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leqslant q$.
On définit une suite (u_n) en posant $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a alors les résultats suivants.

i. f possède un unique point fixe ℓ;
ii. $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant q|u_n - \ell|$;
iii. $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant q^n|u_0 - \ell|$;
iv. (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 27.

On considère l'équation (E) $2x + \sin(x) = 4$.

1. Montrer que (E) possède une unique solution que l'on notera α.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(4 - \sin(u_n))$ converge vers α.
3. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à ε près.
4. Écrire une fonction `Python` prenant en argument un réel $\varepsilon > 0$ qui renvoie une valeur approchée de α à ε près.

6 Autres exercices

Exercice 28.

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $[-\pi,\pi]$ les équations et inéquations suivantes :

(i) $\cos(5x) - \sin(5x) = 0$

(ii) $\cos(2x) + \left(\sqrt{3}+2\right)\cos(x) + 1 + \sqrt{3} = 0$

(iii) $\tan(x)\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$

(iv) $\cos(3x) - \sin(3x) < \sqrt{2}$

(v) $\sqrt{2}\,(\cos(5x) - \sin(5x)) - \left(\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)\right) = 0$

(vi) $\cos(x) + \cos 7x = \cos(3x)$

(vii) $\cos(x) - \cos 2x = \sin(3x)$

$(viii)$ $\cos(2x) - 9\cos(x) + 5 > 0$

Exercice 29.
Soient x, y des réels. Montrer que l'on a :
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2(x) - \sin^2(y) = \cos^2(y) - \sin^2(x).$$
Et si $\tan(x)$ et $\tan(y)$ sont bien définies, montrer
$$\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1-\tan^2(x)\tan^2(y)}{(1+\tan^2(x))(1+\tan^2(y))}.$$

Exercice 30.

1. Résoudre $(E) : \sin(4x) - \sin(x) = 0$.

2. Déterminer un polynôme P tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(4x) - \sin(x) = \sin(x)\, P\left(\cos(x)\right).$$
3. Calculer les racines de P et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 31.
Exprimer $\cos(7\theta)$ à l'aide de $\cos(\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 32.
Linéariser $\sin^3(x)\cos^4(x)$.

Exercice 33.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(i)\ \prod_{i=0}^{n} 2^i, \qquad (ii)\ \prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2}, \qquad (iii)\ \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Exercice 34.
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$(i)\ \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j), \qquad (ii)\ \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{i}{j}, \qquad (iii)\ \sum_{1\leq i,j\leq n} \ln(i^j).$$

Exercice 35.
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants.

(i) $X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ $\quad(ii)$ $X^4 + X^2 + 1$ $\quad(iii)$ $X^6 + X^3 + 1$
(iv) $(3X-1)^5 - (X+2)^5$ $\quad(v)$ $X^3 + 8i$ $\quad(vi)$ $X^4 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

Exercice 36.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme
$$P(X) = nX^{n+2} - (4n+1)X^{n+1} + 4(n+1)X^n - 4X^{n-1}.$$

Exercice 37.
Montrer que le polynôme P divise Q dans chacun des cas suivants.
1. $Q = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ et $P = (X-1)^3$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
2. $Q = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $P = X^2 - X + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$.
3. $Q = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ et $P = X^2 + X + 1$, avec $n, p, q \in \mathbb{N}$.

Exercice 38.
Soit $P = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ et $Q_n = X^n \sin(\theta) - X\sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$, pour $n \geqslant 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que P divise Q_n.
2. Déterminer le quotient dans la division euclidienne de Q_n par P.

Exercice 39.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$, on a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{i=0}^{n-1} z^i$.

2. Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

3. En déduire l'égalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 40.

On pose $z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

1. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$. Montrer que S et T sont conjugués, et que la partie imaginaire de S est positive.

2. Calculer $S + T$ et ST, puis en déduire S et T.

Exercice 41. **Polynômes de Tchebychev**

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par:

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = 2X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

1. Calculer $T_2(X)$ et $T_3(X)$.

2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ \sin((n+1)x) = \sin(x)T_n(\cos(x))$.

Exercice 42.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0;1[$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-u_n}\right)$.

1. Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On pose $\theta_0 = \arcsin\left(\sqrt{u_0}\right)$. Exprimer u_n en fonction de n et θ_0, puis donner un équivalent de u_n.

Exercice 43.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. En déduire un équivalent simple de $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 44.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

2. Montrer que, pour tout entier n, on a $u_n \geq 2$.

3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

4. Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a $\ln(1+x) \leq x$.

5. En déduire que, pour tout entier n, on a

$$1 \leq u_n \leq v_n,$$

où (v_n) est une suite que l'on explicitera et dont on déterminera la limite.

6. Conclure que la suite (u_n) converge vers un élément ℓ de $[2; e^2]$.