Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

10 Séries entières

Dans le **Chapitre 7**, on a rappelé qu'il était possible de *développer en série* la fonction exponentielle, et même de donner un sens à l'exponentielle complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Cette série est un cas particulier de **série entière** : une série $\sum a_n z^n$ dont le terme général fait intervenir des puissances d'un paramètre complexe z.
Les séries entières jouent un rôle fondamental dans diverses branches des mathématiques ; elles permettent de représenter de nombreuses fonctions, de résoudre des équations différentielles, de caractériser les lois de variables aléatoires... On introduit dans ce chapitre les éléments qui permettent de les étudier.

Comme d'habitude, dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Notion de série entière, de rayon de convergence

1.1 Définition, exemples

Comme rappelé ci-avant, on peut écrire l'exponentielle de tout nombre complexe comme la somme d'une certaine série. Mais, pour d'autres séries dépendant d'un paramètre complexe, la convergence n'a pas lieu pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres réels $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum x^n$ converge.
2. Même question avec les série $\sum e^n x^n$, $\sum \cos(n) x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum z^n$ converge.
4. Même question avec la série $\sum e^n z^n$.

Définition 1. **Série entière**

On appelle **série entière** de la variable réelle ou complexe z toute série de la forme $\sum a_n z^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Les termes de la suite (a_n) sont appelés les **coefficients** de la série.

La fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est alors appelée **fonction somme** ou plus simplement **somme** de la série.

On appelle **domaine de convergence** de la série le domaine de définition de la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, c'est à dire l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles la série converge.

Exemple 1. **Série géométrique**

La série géométrique $\sum z^n$ est une série entière de la variable complexe z, de domaine de convergence $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ (ou $]-1,1[$ si on la considère comme une série de la variable réelle).
Sa somme vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Remarque 1.

Bien que $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$ soit définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, elle ne coïncide avec $z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ que sur $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

1.2 Rayon de convergence

On s'intéresse dans un premier temps au domaine de convergence des séries entières.

Proposition 1. **Lemme d'Abel**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Preuve. Notons que $z_0 = 0$ n'est pas un cas intéressant à traiter : la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0 donc bornée et il n'existe pas de nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < z_0 = 0$.
Notons maintenant $M \in \mathbb{R}_+$tel que pour tout $z \in \mathbb{C}, |a_n z_0^n| \leqslant M$ avec $z_0 \neq 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|z| < |z_0|$:

$$|a_n z^n| = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \right| \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

La série $\sum a_n z^n$ est donc absolument convergente par comparaison avec la série géométrique $\sum \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n$ absolument convergente car $|z| < |z_0| \iff \left|\dfrac{z}{z_0}\right| < 1$. □

Rappel 1.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On appelle *borne supérieure de A* l'élément α de $\overline{\mathbb{R}}$ défini comme suit:

- ✗ α est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A, si A est non vide et majoré.
- ✗ $\alpha = +\infty$ si A est non vide et non majoré.
- ✗ $\alpha = -\infty$ si A est vide.

La borne supérieure α de A est notée $\alpha = \sup A$.

Définition 2. **Rayon de convergence**

On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ l'élément R de $\overline{\mathbb{R}}$ défini par:

$$R = \sup\{r \geq 0\ ;\ (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Exemple 2. **Quelques rayons de convergence**

Avec les remarques précédentes,

- ✗ La série géométrique $\sum z^n$ admet $R = 1$ pour rayon de convergence.
- ✗ La série exponentielle $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ admet $R = +\infty$ pour rayon de convergence.
- ✗ La série $\sum n! z^n$ admet $R = 0$ pour rayon de convergence.

Théorème 1.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. On a les résultats suivants:

i. si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument;
ii. si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement;
iii. si $|z| = R$, alors on ne peut rien dire en général.

Preuve.

i. Supposons $|z| < R$. On peut trouver $r > 0$ tel que $|z| < r < R$. La suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. Puisque $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente par le lemme d'Abel.

ii. Supposons $|z| > R$.
La suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc non bornée et ne converge donc pas vers 0. La série $\sum a_n z^n$ est donc grossièrement divergente.

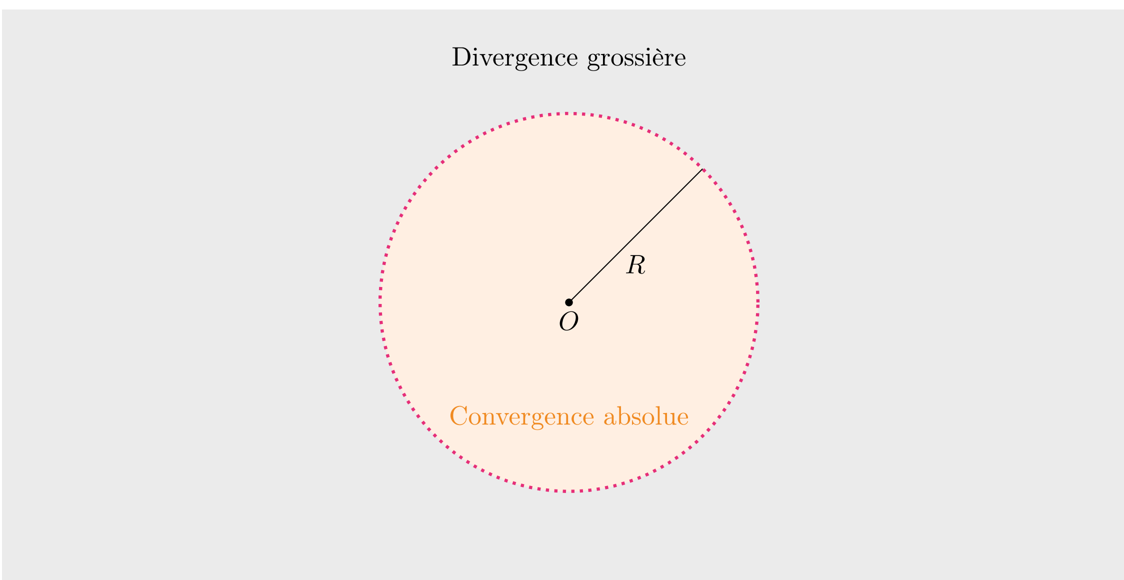
□

Remarque 2.
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence.

✗ Si on considère que la variable z est réelle, on en déduit que la série converge sur $]-R, R[$ (appelé *intervalle ouvert de convergence*) mais la convergence en $z = -R$ et $z = R$ nécessite une étude supplémentaire: le domaine de convergence peut être $]-R, R[, [-R, R[,]-R, R]$ ou $[-R, R]$.

✗ Si on considère que la variable z est complexe, alors la série converge sur $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$ (appelé *disque ouvert de convergence*), mais la convergence dans le cas $|z| = R$ nécessite une étude supplémentaire.

☞ On retiendra qu'on ne peut rien dire à l'avance sur la convergence sur le bord du *disque de convergence*.
Sur la figure ci-dessous, le cercle en pointillés est une zone d'incertitude pour la convergence de la série entière de rayon de convergence R.



1.3 Calcul pratique du rayon de convergence

Méthode 1. **Utilisation du lemme d'Abel**
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R.
Si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par exemple lorsque $\sum a_n z_0^n$ converge), alors $R \geq |z_0|$.
Inversement, si on trouve $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leq |z_0|$.

Exemple 3.

Considérons la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$.
La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge donc $R \geqslant 1$. La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $R \leqslant 1$.
Ainsi, $R = 1$.

Exercice 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière qui converge pour $z = \sqrt{2}i$ et qui diverge pour $z = 1 + i$. Déterminer son rayon de convergence.

Méthode 2. **Utilisation de la règle de d'Alembert**

Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ on peut utiliser la règle de d'Alembert, dans le cas où a_n est non nul à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

On pose $u_n(z) = a_n z^n$ pour tout $n \geq n_0$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} z\right|$, et dans le cas où $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ possède une limite ℓ:

- ✗ si $\ell = 0$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc la série converge: le rayon de convergence est $R = +\infty$;
- ✗ si $\ell = +\infty$, alors $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc la série diverge: le rayon de convergence est $R = 0$;
- ✗ si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell|z|$ et donc si $\ell|z| < 1$ la série converge, et si $\ell|z| > 1$ la série diverge: on a ainsi $R = \frac{1}{\ell}$.

Remarque 3.

On pourra retenir que, si $\sum a_n z^n$ est une série entière dont les cœfficients sont **non nuls** telle que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell,$$

alors son rayon de convergence est $R = \frac{1}{\ell}$.
Mais **attention** le théorème, ainsi formulé, ne s'adapte pas au cas des *séries lacunaires* (voir l'**Exercice 4**).

Exemple 4.

$\sum_{n\geq 2} \frac{z^n}{\ln n}$ admet $R = 1$ pour rayon de convergence.

Exercice 3.

Reprendre les série de l'**Exemple 2** en utilisant la règle de d'Alembert.

En pratique, le même raisonnement s'adapte à certains types de *séries lacunaires*, c'est-à-dire de séries possédant une infinité de termes nuls.

Exercice 4.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^{2n+1}}{n3^n}$.

Utilisation d'un encadrement ou d'un équivalent

Proposition 2.

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Si on a $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geq R_b$.

Preuve. On a bien sûr pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| \leqslant |b_n z^n|$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |z| < R_b &\Longrightarrow \sum |b_n z_n| \,\text{cv} \\ &\Longrightarrow \sum |a_n z^n| \,\text{cv par comparaison de séries à termes positifs} \\ &\Longrightarrow \sum a_n z^n \text{cv} \\ &\Longrightarrow |z| \leqslant R_a \end{aligned}$$

On en déduit que $R_b \leqslant R_a$. □

Exemple 5.

La série entière $\sum \cos(n) z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $|\cos(n)| \leqslant 1$ et la série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R' = 1$ donc $R \geqslant R' = 1$.
Mais, la série $\sum \cos(n) 1^n$ diverge grossièrement donc $R \leqslant 1$.

Exercice 5.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum e^{\cos(n)} z^n$.

Proposition 3.

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Si on a $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Preuve. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, les séries $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$ sont alors de même nature d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. Par définition du rayon de convergence, ceux-ci sont égaux. □

Exercice 6.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \arctan(n) z^n$.

Proposition 4.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ possèdent le même rayon de convergence.

Preuve. On peut faire une preuve directe (c'est un bel exercice); on se contentera ici de l'interpréter comme conséquence du **Théorème 4**. □

Exemple 6.

La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ a le même rayon de convergence que la série entière $\sum n \frac{z^n}{n} = \sum z^n$ c'est-à-dire $R = 1$.

Exercice 7.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{n(n-1)} z^n$.

2 Propriétés de la somme d'une série entière

2.1 Opérations sur les séries entières

Proposition 5. **Multiplication par un scalaire et rayon de convergence**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence, et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors $\sum \lambda a_n z^n$ admet également R pour rayon de convergence.

De plus, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout complexe z tel que la série converge.

Proposition 6. **Somme et rayon de convergence**

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayon de convergence respectif R_a et R_b.
Alors, le rayon de convergence R_{a+b} de la série $\sum (a_n + b_n) z^n$ est tel que $R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b)$.
De plus, si on suppose encore $R_a \neq R_b$, alors on a $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Enfin, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ pour tout complexe z tel que la série converge.

Proposition 7. **Produit de Cauchy et rayon de convergence**

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

Alors, le rayon de convergence R_c de leur produit de Cauchy, $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, est tel que $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

De plus, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$ pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$.

2.2 Propriétés de la somme vue comme une fonction de la variable réelle

Dans cette section, on ne s'intéresse qu'aux séries entières de la variable réelle. Les résultats suivants sont **admis**, conformément au programme officiel.

Théorème 2. **Continuité**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R. Alors, la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle $]-R, R[$.
De plus, si f est définie en $\pm R$, alors elle est continue en ces points.

Remarque 4.

On pourra retenir que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur tout son intervalle de définition.

Théorème 3. **Dérivation terme à terme**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R. Alors, la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$, de sorte que:

$$\forall x \in]-R, R[, \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

En d'autres termes, les séries entières se *dérivent terme à terme* sur leur intervalle ouvert de convergence.

Remarque 5.

- ✗ Dans la série $\sum a_n x^n$, le terme $a_0 x^0$ est constant, et disparait donc lorsque l'on dérive.
- ✗ **Attention**, la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ n'est pas en général dérivable sur tout son intervalle de définition (contrairement à la continuité), car elle peut ne pas être dérivable au bord même en cas de convergence.

Exercice 8.
Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme de la série $\sum n x^n$ où $x \in \mathbb{R}$.

Corollaire 1. **Classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme**

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence R. Alors la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

Théorème 4. **Intégration terme à terme**
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
On note $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sa fonction somme et F une primitive de la fonction $f \in \mathcal{C}^0(]-R;R[)$.
La série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est une série entière de rayon de convergence R et

$$\forall x \in]-R, R[, F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Autrement dit, pour pour tout $x \in]-R;R[$,

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Remarque 6.
Il n'y a pas au programme de théorème permettant d'intégrer ou de dériver une série entière en $x = \pm R$.

Exercice 9.

1. Montrer $\forall x \in]-1, 1[,\ \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, et justifier que le rayon de convergence de cette série entière est 1.
2. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

3 Développement en série entière d'une fonction

3.1 Définition et résultats fondamentaux

Définition 3. **Fonction DSE**
Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$ et $I =]-\alpha, \alpha[$ un intervalle ouvert centré en 0. Une fonction f définie sur I est dite **développable en série entière** sur I s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ convergente sur I telle que

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Remarque 7.

- ✗ Si f est développable en série entière sur un intervalle I, alors f est nécessairement $\mathcal{C}^\infty$ sur I (mais cette condition n'est pas suffisante).
- ✗ Si f est développable en série entière sur un intervalle $I =]-\alpha, \alpha[$, alors le rayon de convergence R de la série vérifie $R \geq \alpha$.
- ✗ I n'est pas nécessairement le domaine de définition de f ; en d'autres termes, f peut n'être développable en série entière **que sur une partie** de son domaine de définition (voir les exemples ci-dessous).

Exemple 7. **Quelques fonctions DSE**

On a prouvé précédemment les résultats suivants:

- ✗ $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$: $\forall x \in]-1, 1[, \ \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
- ✗ $x \mapsto e^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- ✗ $x \mapsto \arctan x$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$: $\forall x \in]-1, 1[, \ \arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Théorème 5. **Condition nécessaire d'une fonction DSE**

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}_+^*}$, de sorte que

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On a alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ce théorème dit qu'en cas où il est possible de développer en série entière, les coefficients sont nécessairement ceux de la formule de Taylor-Young (c'est à dire ceux du développement limité).

Preuve. Supposons que f soit développable en série entière sur $I :=]-\alpha, \alpha[$. C'est à dire, supposons, qu'il existe $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que $\alpha \leqslant R$ et vérifiant

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha; \alpha[$ par le corollaire du **Théorème 3** de dérivation terme à terme.
De plus, on obtient par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\alpha; \alpha[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

En effet, le caractère héréditaire se montre avec les arguments suivants :

$$\begin{aligned} f^{(p+1)}(x) = \left(f^{(p)}\right)'(x) = \left(\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)a_n x^{n-p}\right)' &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)a_n x^{n-p-1} \\ &= \sum_{n=p+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-(p+1)-1)a_n x^{n-(p+1)}. \end{aligned}$$

En particulier pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = p! a_p$: le développement en série entière de f au voisinage de 0 coïncide bien avec la série de Taylor en 0. □

Remarque 8.

- ✗ On en déduit que si une fonction f est dérivable en série entière sur un intervalle I, son développement est nécessairement celui de Taylor en 0:
$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$
Toutefois cette égalité n'est pas nécessairement vérifiée, et même si c'est le cas elle n'est pas nécessairement valable sur tout le domaine de définition (voir l'exemple de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ ci-dessus).
- ✗ Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, dont la série de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge sur $\mathbb{R}$, bien que l'égalité
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
ne soit vérifiée **pour aucun** réel x.

Remarque 9. **Ne pas confondre**

Il ne faut pas confondre la notion de développement en série entière et celle de développement limité:

- ✗ un développement limité est une notion locale, alors qu'un développement en série entière est une notion globale;
- ✗ un développement limité ne fait intervenir qu'une somme finie, alors qu'un développement en série entière fait intervenir la somme d'une série.

Toutefois, une fonction développable en série entière admet nécessairement un développement limité à tout ordre en 0, puisque l'on démontre aisément pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \implies f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Exemple 8.

Dans le **Devoir Surveillé n°2**, on a pu voir que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
était de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et admettait un développement limité nul à tout ordre.
f ne peut donc pas être développable en série entière car elle n'est identiquement nulle sur aucun intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$.

Corollaire 2. **Identification des coefficients sur les séries entières**

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, et $r > 0$ tels que:
$$\forall x \in]-r, r[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$
Alors on a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$.

Proposition 8. **Parité et coefficient du DSE**

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle I, de sorte que $\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors:

i. si f est paire, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0$;
ii. si f est impaire, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0$.

Preuve. Soit f développable en série entière sur $]-r;r[$.
Si f est paire, alors, pour tout $x\in]-r;r[$, on a :

$$\begin{aligned} f(-x)=f(x) &\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-x)^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &\Longrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1}=-\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} \\ &\Longrightarrow \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1}x^{2p+1}=0 \Longrightarrow \forall p\in\mathbb{N}, a_{2p+1}=0 \end{aligned}$$

par unicité du développement en série entière de la fonction nulle.

De manière analogue, le développement en série entière d'une fonction impaire ne contient que des termes de degré impair. □

3.2 Méthodes pratiques de développement

Par une formule de Taylor

Proposition 9.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{et} \quad \sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Exercice 10.
Montrer que la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Par opérations élémentaires (combinaisons linéaires ou produit)

Proposition 10.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exercice 11.
Déterminer un développement en série entière de $x\mapsto \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ de deux façons différentes.

Par intégration

Proposition 11.
Pour tout $x\in]-1,1[$, on a $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. De plus le rayon de convergence de cette série est $R=1$.

Exercice 12.
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Proposition 12.
Pour tout $\forall x\in]-1,1[$, on a $\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$. De plus le rayon de convergence de cette série est 1.

Preuve. Voir l'**Exercice 12**. □

Par équation différentielle

Théorème 6.
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. La fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est l'unique solution du problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

On en déduit $\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, et le rayon de convergence de cette série est 1.

Preuve. Notons $(\mathcal{P})$ le problème de Cauchy susmentionné.
Il est clair que la fonction f_α est solution de $(\mathcal{P})$. Déterminons alors les solutions de $(\mathcal{P})$ développables en série entière, par Analyse-Synthèse.

✗ **Analyse**. Supposons qu'il existe y une fonction : développable en série entière sur un voisinage $]-r;r[$ de 0 solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$. Soit $x \in]-r;r[$. On a $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Par le théorème de dérivation terme à terme, on obtient $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Ainsi, y est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
&(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
\iff &\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n. \\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n. \\
\iff &a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + n a_n\right) x^n = \alpha a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha a_n x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, y est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & \alpha a_0 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \end{array} \right. \iff \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.$$

On obtient alors par une récurrence (que l'on laisse en exercice) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a_0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-r;r[$:

$$y(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Puisque $y(0) = 1$, on a $a_0 = 1$.

✗ **Synthèse**. On pose $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

On détermine maintenant le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$. On utilise la règle de d'Alembert : pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}\right| \\
&= \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $R=1$. On a donc montré que y est développable en série entière sur $]-1;1[$, $y(0)=1$ et y est solution de $(\mathcal{P})$ d'après les équivalences écrites dans la partie Analyse.

Les fonctions f_α et $x \mapsto \sum a_n x^n$ sont toutes deux solution de $(\mathcal{P})$. Elles coïncident par unicité de la solution au problème de Cauchy. f_α est donc développable en série entière sur $]-1;1[$ et pour tout $x \in]-1;1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

□

Remarque 10.

- ✗ Si $\alpha \in \mathbb{N}$, il suffit d'utiliser le binôme de Newton pour retrouver la formule ci-dessus, qui devient alors une somme finie (et donc son rayon de convergence est $+\infty$).
- ✗ La formule de Taylor permet également d'obtenir le développement de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

3.3 Développements en série usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Les développements suivants doivent être sus.

Fonction	DSE	Rayon de convergence
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R=1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$R=1$
e^x	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R=+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R=+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R=+\infty$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R=1$
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$R=+\infty$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$R=+\infty$
$\arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$R=1$

4 Sélection d'exercices

Exercice 13.

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes.

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^{2/3}}$ *ii)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n^{3/2}}$ *iii)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{(2n)!}x^n$

iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}x^{2n}\sin(n\theta)$ *v)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln(n)}{n}x^n$ *vi)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{2^n+1}$

vii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)x^n$ *viii)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$ *ix)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}})x^n$

Exercice 14.

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières réelles suivantes sur l'intervalle ouvert de convergence.

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{2^n}$ *ii)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(n^2+n+1\right)x^n$ *iii)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{3^n n}$

iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n}}{n!}$ *v)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin(n\alpha)\,x^n$ *vi)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n\alpha)}{n!}x^n$

vii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2-n+1}{n!}x^n$ *viii)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}x^n$ *ix)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^{(-1)^n}x^n$

Exercice 15.

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes, où x est un réel. Préciser à chaque fois sur quel intervalle le développement est valable.

i) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ *ii)* $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{2+x}\right)$ *iii)* $f(x)=\ln\left(2-x^2\right)$

iv) $f(x)=e^{x/2}\mathrm{sh}x$ *v)* $f(x)=\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)$ *vi)* $f(x)=\arcsin x$

vii) $f(x)=\sin^2(2x)$ *viii)* $f(x)=\dfrac{2x-1}{(2+x-x^2)^2}$

Exercice 16.

1. Pour tout $x\neq 0$, on pose $f(x)=\dfrac{\mathrm{sh}x-x}{x^3}$.
   Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Déterminer le développement en série entière de $g : x\mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{sh}t-t}{t^3}\mathrm{d}t$.

Exercice 17.

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_n z^n$ où a_n est le nombre de diviseurs de l'entier n.

Exercice 18.

1. Montrer que $F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est développable en série entière et donner son rayon de convergence.

2. Calculer $F(1)$ et en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 19.

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$.

2. Montrer que cette série entière est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle:

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

3. Pour $x \in]-R, R[$, déterminer une nouvelle expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

Exercice 20.

1. On suppose $\forall n, a_n > 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Que peut-on dire du rayon de $\sum a_n x^n$ et de $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$?

2. On suppose avoir $M > 0$ tel que $\forall n, 0 < a_n < M$. Que peut-on dire du rayon de $\sum a_n x^n$ et de $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$?

Exercice 21.

Montrer $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 22.

Pour x réel, on pose : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.
3. Établir la continuité de f en -1.
4. Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 23.

On considère la série entière $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \ln(n) x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note S sa somme.
2. Montrer que

$$\forall x \in]-1;1[, S(x) = \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}\right).$$

3. En déduire que S admet une limite en 1^-et que

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

4. En utilisant la formule de Wallis ci dessous

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

calculer la limite de S en 1^-.