11 Équations différentielles

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à résoudre de nouvelles équations différentielles (c'est à dire davantage d'équations différentielles que celles qu'on sait déjà résoudre grâce au cours de première année, notamment grâce au développement en série entière).
On considère un intervalle non trivial I de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

1 Résultats généraux

1.1 Vocabulaire et structure de l'ensemble des solutions

Définition 11.1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✗ On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** n toute équation de la forme

$$(E) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b,$$

  où
  - $a_0, \ldots, a_n$ et b sont des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$;
  - y est une fonction inconnue.

- ✗ Dans le cas où la fonction b est nulle, on dit que l'équation est **homogène** (ou sans second membre).

- ✗ On appelle **équation homogène associée** à E l'équation obtenue en remplaçant b par 0.
  Dans le cas où la fonction a_n est constante et vaut 1, l'équation est dite **normalisée** ou **résolue** en $y^{(n)}$.

- ✗ Soit $J \subset I$ un intervalle véritable. On dit qu'une fonction y est **solution** de (E) sur J si y est n fois dérivable sur J, de sorte que $\forall x \in J,\ a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$.

- ✗ Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions sur I.

☞ Par abus de notation, toute équation différentielle de la forme $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b$ sera notée $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, pour marquer le fait que $a_0, \ldots, a_n, b$ sont *a priori* des fonctions et non des constantes.

Théorème 11.1. **Structure de l'ensemble des solutions**

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions sur I de $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, et $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène associée. On a alors les résultats suivants.

i. $\mathcal{S}_0$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
ii. Si (E) possède au moins une solution y_0, alors $\mathcal{S} = \{y_0 + y_h;\ y_h \in \mathcal{S}_0\}$.

Remarque 11.1.

- ✗ Une équation différentielle homogène possède une infinité de solution, mais on peut en pratique donner sa solution en fonction d'une ou plusieurs constantes, dont la valeur est associée aux conditions initiales (voir la suite). Lorsque celles-ci ne sont pas fixées, et que les constantes sont quelconques, on parle de *la solution générale* de l'équation.
  Par exemple, $y' = ay$ admet $y : x \mapsto \lambda e^{ax}$ pour solution générale.

- ✗ Le point *ii.* prouve que la solution générale d'une équation (E) est somme de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) et d'une solution *particulière* de (E). Il peut être retenue sous la forme suivante: $y_{\text{gén},E} = y_{\text{gén},E_0} + y_{\text{part},E}$.

1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 11.2. **Cauchy-Lipschitz**

On considère une équation différentielle de la forme $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, avec $a_0, \ldots, a_n, b$ continues sur I, et on suppose que a_n ne s'annule pas. Pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, l'équation possède une unique solution y sur I qui vérifie

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Preuve. Résultat admis. □

Remarque 11.2.

- ✗ La condition a_n ne s'annule pas sur I est **nécessaire**: sans elle le résultat n'est plus vrai (voir les problèmes de recollement de solutions dans la suite). Dans ce cas, on peut alors diviser l'équation par a_n pour obtenir une équation normalisée.

- ✗ La donnée d'une équation différentielle d'ordre n et de conditions initiales associées est appelée un **problème de Cauchy**. Mais il faut bien noter la forme des conditions initiales: leur nombre est égal à l'ordre de l'équation, soit n, et elles portent sur les valeurs de $y, \ldots, y^{(n-1)}$ en un **même point** x_0.

Définition 11.2.

Étant donnée une équation différentielle (E), on appelle **courbe intégrale associée** à (E) toute courbe représentative d'une solution de (E).

Exemple 11.1.

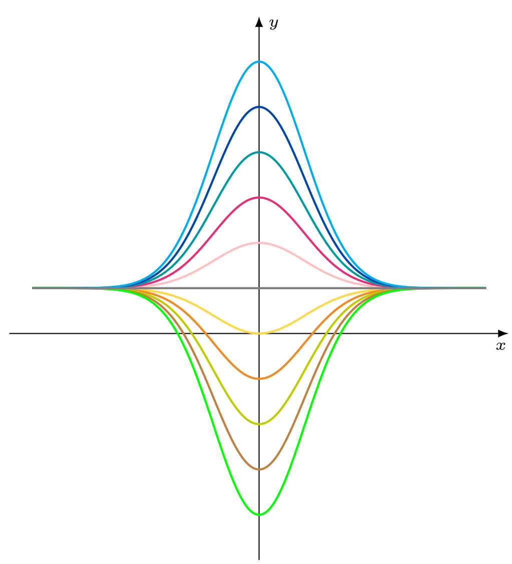
Le théorème précédent montre que l'ensemble des courbes intégrales d'une équation différentielle forme une partition de $I \times \mathbb{K}$. Dans le cas où $\mathbb{K} = I = \mathbb{R}$, on obtient ainsi une partition du plan $\mathbb{R}^2$: en d'autres termes, il passe en chaque point du plan une courbe intégrale et une seule.

La figure ci-contre donne le tracé des courbes représentatives de la solution y_k du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy = x \\ y(0) = k \end{cases}$$

pour $k \in [\![-5, 5]\!]$.
On verra qu'on peut résoudre ce problème de Cauchy et que

$$y_k : x \longmapsto (k-1)e^{-x^2/2} + 1.$$



1.3 Principe de superposition des solutions

Théorème 11.3. **Principe de superposition**

Soient $b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient encore y_1 (resp. y_2) une solution de l'équation différentielle $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = b_1(x)$ (resp. $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = b_2(x)$). On a alors les résultats suivants.

i. λy_1 est une solution de $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \lambda b_1(x)$.

ii. $y_1 + y_2$ est une solution de $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

2 Équations linéaires d'ordre un

Cette section présente des résultats vus en première année. On explique dans un premier temps comment résoudre une équation normalisée, puis comment traiter le cas général.

2.1 Méthode de résolution des équations normalisées

Cas des équations homogènes.

On commence par le cas d'une équation normalisée homogène.

Proposition 11.4.

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. La solution générale de $y' + a(x)y = 0$ est $y : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, et où A est une primitive de a sur I.
En d'autres termes, l'ensemble des solutions de $y' + a(x)y = 0$ sur I est de dimension 1, et c'est la droite vectorielle dirigée par $y : x \mapsto e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a sur I.

Remarque 11.3.

Dans le cadre d'une équation de la forme $y' + a(x)y = 0$, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que la seule solution s'annulant est la fonction nulle, et donc qu'aucune autre solution ne change de signe. Cela permet de retrouver le résultat précédent en raisonnant comme suit:

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = 0 &\iff \frac{y'}{y} = -a(x) \iff \ln|y| = -A(x) + c \\ &\iff |y| = e^{-A(x)+c} \iff y = \underbrace{\pm e^c}_{\lambda} e^{-A(x)}. \end{aligned}$$

Remarque 11.4.

On choisira la fonction $x \mapsto A(x)$ la plus simple possible. En pratique on commence par calculer une primitive quelconque de $x \mapsto a(x)$ (en calculant une intégrale), puis on choisit pour A la primitive obtenue en supprimant tous les termes constants présents dans celle calculée précédemment, étant entendu que la primitive d'une fonction est définie à une constante près.

Cas des équations avec second membre.

Pour pouvoir résoudre une équation normalisée quelconque, il suffit de savoir en déterminer une solution particulière (on pourra alors appliquer le **Théorème 11.1**). Le plus souvent, on applique la méthode de **variation de la constante**.

Proposition 11.5. **Variation de la constante**

Soient $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. Alors l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ admet sur I une solution particulière de la forme $y_1 : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a (et où λ est une primitive de $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$).

Méthode 11.1. **Variation de la constante**

On recherchera une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$ sous la forme $y_1(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, où λ est une fonction dérivable sur I; il suffira alors d'injecter y_1 dans l'équation pour déterminer λ. On aura toujours

$$\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$$

qu'il faudra donc primitiver.

Exercice 11.1.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{x^2+1}y = \dfrac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x^2+1}}$.

On peut encore citer le résultat suivant, qui n'est valable que dans le cas des équations à cœfficients constants, mais qui est parfois plus rapide d'utilisation que la méthode de variation de la constante.

Proposition 11.6. **Forme des solutions particulières**

Soient $(a, b, \alpha) \in \mathbb{K}^3$, $\omega \in \mathbb{R}$, et P un polynôme à cœfficients dans $\mathbb{K}$.

i. Si $a \neq 0$, l'équation $y' + ay = b$ admet une solution particulière constante, définie par $y_1(x) = \frac{b}{a}$.

ii. L'équation $y' + ay = P(x)e^{\alpha x}$ admet une solution particulière définie par

- ✗ $y_1(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ si $\alpha \neq -a$, où Q est un polynôme de même degré que P;
- ✗ $y_1(x) = xQ(x)e^{\alpha x}$ si $\alpha = -a$, où Q est un polynôme de même degré que P.

iii. Les équations $y' + ay = P(x)\cos\omega x$ et $y' + ay = P(x)\sin\omega x$ admettent une solution particulière définie par $y_1(x) = Q(x)\cos\omega x + R(x)\sin\omega x$, où Q, R sont des polynômes de degré inférieur à celui de P.

Exercice 11.2.

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

i. $y' + 2y = 3$ *ii.* $y' - y = t^2 + 1$ *iii.* $y' + y = te^t$

Méthode 11.2. **Plan d'étude**

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre un normalisée, on peut procéder comme suit.

1. *Résolution de l'équation homogène.* On obtient la solution générale $y_h : x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$.
2. *Recherche d'une solution particulière y_1 de l'équation non homogène.* S'il n'en existe pas d'évidente, on utilise la méthode de variation de la constante pour chercher une solution particulière de la forme $y_1 : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$.
3. **Conclusion.** On écrit que la solution générale de l'équation considérée est $y_h + y_1$. Et si l'énoncé fournit une condition initiale $y(x_0) = \alpha_0$, on détermine l'unique valeur de la constante qui permet de la réaliser en résolvant $y(x_0) = \alpha_0$.

Mais en pratique on préfère remplacer les points **2.** et **3.** par le suivant.

2'. *Recherche de la solution générale y par changement de variable.* On utilise la méthode de variation de la constante pour chercher la solution générale sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$, car toute solution y de l'équation est de cette forme.

Exercice 11.3.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - 3y = t\ln(t)e^{3t}$.

2.2 Cas général: recollement des solutions

Considérons une équation différentielle $(E) :\ a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, à résoudre sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$. Dans le cas où a_1 ne s'annule pas, il suffit de diviser l'équation par $a_1(x)$, puis de résoudre $(E') :\ y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{b(x)}{a_1(x)}$ en utilisant les méthodes précédentes.
Mais dans le cas où par exemple a_1 s'annule en un unique réel $x_0 \in]\alpha, \beta[$, il faut procéder différemment: on commence par résoudre (E') sur $]\alpha, x_0[$ et sur $]x_0, \beta[$, puis on essaye de recoller les deux solutions générales ainsi obtenues de façon à obtenir une solution sur $]\alpha, \beta[$ de (E). Considérons pour commencer l'exemple suivant.

Méthode 11.3. **Principe de recollement**

Considérons une équation différentielle (E) : $a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$, à résoudre sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$ où a_1 s'annule en un unique réel $x_0 \in]\alpha, \beta[$.
Soit alors (E') l'équation

$$y' + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{b(x)}{a_1(x)};$$

on appelle $y_{1,\lambda}$ la solution générale de (E') sur $]\alpha, x_0[$ (qui dépend donc d'un paramètre λ), et $y_{2,\mu}$ la solution générale de (E') sur $]x_0, \beta[$ (qui dépend d'un paramètre μ).

- ✗ **Analyse**: soit y une solution de (E) sur I; il existe alors deux scalaires λ, μ tels que

$$(\star)\ y(x) = \begin{cases} y_{1,\lambda}(x) \text{ si } x \in]\alpha, x_0[\\ y_{2,\mu}(x) \text{ si } x \in]x_0, \beta[\end{cases}$$

  Et toujours parce que y est solution de (E) on a:

  i. y est continue et dérivable en x_0;
  ii. y vérifie (E) en x_0.

- ✗ **Synthèse**: réciproquement, on démontre aisément que toute fonction y définie par $(\star)$ et vérifiant *i.* et *ii.* est une solution de (E) sur I.

Pour résoudre (E) sur I il suffit donc de résoudre (E') sur $]\alpha, x_0[$ et $]x_0, \beta[$ (c'est-à-dire déterminer $y_{1,\lambda}$ et $y_{2,\mu}$), puis de déterminer les valeurs de λ, μ pour lesquelles *i.* et *ii.* sont vérifiées.

Exercice 11.4.
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $xy' - \frac{1}{2}y = x$.

Remarque 11.5.
Cette méthode se généralise au cas où a_1 s'annule plusieurs fois sur I : il faut alors effectuer un recollement en chaque point où a_1 s'annule.

3 Équations linéaires d'ordre deux

3.1 Cas des équations à cœfficients constants

Théorème 11.7. **Résolution des équations homogènes dans $\mathbb{C}$**

Soient a, b, c des complexes tels que $a \neq 0$, $ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle homogène et $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée. On appelle $\mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ l'ensemble de ses solutions qui sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. On a alors les résultats suivants.

i. Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $\mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

ii. Si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors $\mathcal{S}_0(\mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

Preuve. On se ramène à une équation différentielle matricielle d'ordre un, qui se résout par réduction matricielle. □

Théorème 11.8. **Résolution des équations homogènes dans $\mathbb{R}$**

Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$, $ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle homogène et $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée.
On appelle $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble de ses solutions à valeurs réelles. On a alors les résultats suivants.

i. Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

ii. Si l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées distinctes $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, alors $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de la forme

$$y : x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Dans ce cas, les solutions sont également les fonctions de la forme $y : x \mapsto K e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi)$, avec K, φ réels.

iii. Si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de la forme $y : x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{rx}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

On a enfin le résultat suivant, qui permet de donner une solution particulière dans un cas particulier.

Proposition 11.9. **Solution particulière dans le cas exponentielle/polynôme**

Soient a, b, c, z des complexes, et P un polynôme. L'équation différentielle $ay'' + by' + cy = e^{zx}P(x)$ admet une solution particulière de la forme

$$y_1(x) = e^{zx} x^{m(z)} Q(x),$$

où Q est un polynôme de même degré que P, et où $m(z)$ est la multiplicité de z en tant que racine de l'équation caractéristique.

Remarque 11.6.

Ce résultat peut également être utilisé dans le cas des équations du premier ordre: il suffit en effet de prendre $a = 0$, on retrouve alors le **Théorème 11.6**.

Exercice 11.5.

Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = \cos x$.

3.2 Dimension de l'espace des solutions dans les conditions de Cauchy

Théorème 11.10.

Soient a, b, c des fonctions continues sur I, telles que a ne s'annule pas. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ de dimension 2.

Preuve. Le théorème de Cauchy-Lipschitz induit un isomorphisme de l'ensemble des solutions vers $\mathbb{K}^2$. □

Théorème 11.11.

Soient a, b, c, f des fonctions continues sur I, telles que a ne s'annule pas. Alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ n'est pas vide si on suppose que l'équation homogène associée possède une solution y_1 qui ne s'annule pas sur I.

Preuve. Sous l'hypothèse que y_1 ne s'annule pas on peut faire une variation de la constante: en injectant $y = \lambda y_1$ on voit que λ' vérifie une équation du premier ordre normalisable et dépend donc linéairement d'une constante, par suite $y = \lambda y_1$ dépend linéairement de deux constantes (on retrouve le résultat précédent). □

La *preuve* ci-dessus donne la méthode suivante.

Méthode 11.4.

La méthode de variation de la constante correspond à un changement de fonction inconnue qui permet de ramener la résolution d'une équation d'ordre 2 à celle d'une équation d'ordre 1, partant d'une solution particulière ne s'annulant pas de l'équation homogène d'ordre 2. Pour cette raison, la variation de la constante s'appelle aussi la *méthode d'abaissement de l'ordre.*

4 Exemples de résolution lorsque les cœfficients ne sont pas constants

4.1 Recherche d'une solution particulière puis variation de la constante

Exercice 11.6.
Résoudre l'équation $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^3$ en commençant par déterminer une solution polynomiale de l'équation homogène associée.

4.2 Recherche d'une solution développable en série entière

Exemple 11.2.
On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : \left(t^2+t\right)y'' + (3t+1)y' + y = 0$.

On cherche une solution $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ développable en série entière au voisinage de 0.

✗ **Analyse.** On suppose qu'il existe une telle solution $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ développable en série entière au voisinage de 0 ont on note R le rayon de convergence.
Pour tout $t \in]-R;R[$ en dérivant terme à terme

$$\begin{aligned}
&\left(t^2+t\right)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + (3t+1)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1} + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} t^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)n a_{n+1} t^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&n(n-1)a_n + (n+1)na_{n+1} + 3na_n + (n+1)a_{n+1} + a_n = 0\\
\iff &a_n\left(n^2 - n + 3n + 1\right) + a_{n+1}\left(n^2 + n + n + 1\right) = 0\\
\iff &a_n(n+1)^2 + a_{n+1}(n+1)^2 = 0
\end{aligned}$$

On obtient $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = -a_n = (-1)^n a_0$.

✗ **Synthèse.** On pose $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0(-1)^n t^n$.
Cette série entière a pour rayon de convergence $R = 1$. De plus, y vérifie bien sur $]-1;1[$ l'équation $(\mathcal{E})$ d'après les équivalences écrites dans la partie analyse.

✗ **Conclusion.** On obtient ici une fonction usuelle :

$$\forall t \in]-1;1[,\ y_p(t) = \frac{a_0}{1-(-t)} = \frac{a_0}{1+t}$$

solution particulière de $(\mathcal{E})$.

Remarque 11.7.
Lorsque l'on cherche une solution développable en série entière d'une équation différentielle, on n'oubliera pas de déterminer le rayon de convergence de celle-ci (qui résulte en général directement de la relation de récurrence trouvée entre les coefficients, via la règle de d'Alembert).

Exercice 11.7.

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ en cherchant la solution sous forme de fonction développable en série entière.

4.3 Changement de variable

Méthode 11.5.

On considère l'équation différentielle $(E) : a(t)y'' + b(t)y'(t) + c(t)y = d(t)$ sur I.
On suppose qu'il existe un changement de variable $\varphi : J \to I, x \longmapsto \varphi(x) = t$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur J et tel que φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
On pose $z(x) = y(\varphi(x)) = y(t)$. On dérive deux fois la fonction z par rapport à x.
On remplace t par $\varphi(x)$ dans (E).
On obtient une équation d'inconnue z et on retrouve la solution générale

$$y(t) = z \circ \varphi^{-1}(t).$$

Exemple 11.3.

Résolvons, sur $]-1;1[$, l'équation différentielle (E) : $\left(1-t^2\right)y'' - ty' + y = 0$.

On va poser $t = \cos(x)$.

On le sait bien : la fonction $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ est continue strictement décroissante sur $[0;\pi]$ donc réalise une bijection de $[0;\pi]$ sur $[-1;1]$. De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0;\pi]$.
La bijection réciproque $\varphi^{-1} : t \mapsto \arccos(t) = x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$.
On pose pour $x \in]0;\pi[$: $z(x) = y(\varphi(x)) = y(\cos(x)) = y(t)$.
Pour tout $x \in]-1;1[$:

- ✗ $z'(x) = -\sin(x)y'(\cos x)$
- ✗ $z''(x) = \sin^2(x)y''(\cos x) - \cos(x)y'(\cos x)$

La fonction $t \mapsto y(t)$ est solution sur $]-1;1[$ de (E) si et seulement si pour tout $x \in]0;\pi[$:

$$\underbrace{\left(1-\cos^2(x)\right)y''(\cos(x)) - \cos(x)y'(\cos(x))}_{=z''(x)} + \underbrace{y(\cos x)}_{=z(x)} = 0.$$

Ainsi, z est solution sur $]0;\pi[$ de l'équation $z'' + z = 0$.
L'équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ a pour racine $X = \pm i = 0 \pm 1 \times i$.
Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z(x) = e^{0x}(A\cos(1 \times x) + B\sin(1 \times x)) = A\cos(x) + B\sin(x)$.
La solution générale de (E) sur $]-1;1[$ est alors :

$$y(t) = z \circ \varphi^{-1}(t) = A\cos(\arccos(t)) + B\sin(\underbrace{\arccos(t)}_{\in]0;\pi[}) = At + B\sqrt{1-t^2}, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 11.8.

Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = e^t$.

5 Selection d'exercices

Exercice 11.9.

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I:

i. $y' + 2ty = e^{t-t^2}$ avec $I = \mathbb{R}$;
ii. $(1+x^2)y' - y = 1$ avec $I = \mathbb{R}$;
iii. $ty' - y = t$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$, et la condition initiale $y(1) = 2$;
iv. $xy' - y = -\ln x$ avec $I = \mathbb{R}_+^*$;
v. $(\text{ch}x)y' - (\text{sh}x)y = x\text{ch}^2x$ avec $I = \mathbb{R}$.

Exercice 11.10.

Résoudre l'équation différentielle $y' - \dfrac{1+\sqrt{x}}{2x} y = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$.

Exercice 11.11.

Résoudre (E) : $y' - y\tan x = \cos^2 x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 11.12.

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$, en commençant par la résolution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

i. $xy' + y = \dfrac{|x|}{x^2+1}$;
ii. $t^2y' + ty = 1 + 2t^2$;
iii. $xy' - \dfrac{y}{2} = x^2 \ln|x|$.

Exercice 11.13.

Résoudre les équations différentielles suivantes.

i. $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh}(2x)$ *ii.* $y'' + y' + \dfrac{1}{2}y = x^2 - x$ *iii.* $y'' - 4y' + 5y = e^{2t}$

iv. $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-t}$ *v.* $y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{2}e^t$ *vi.* $y'' + 6y' + 10y = \cos t$

Exercice 11.14.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $\left(1+t^2\right)y'' + ty' - 4y = 0$ en posant $t = \operatorname{sh} u$.

Exercice 11.15.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre (E) : $ty'' + 2y' - aty = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $z = ty$.

Exercice 11.16.

Résoudre l'équation différentielle $t^3y'' + ty' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en commençant par chercher une solution polynomiale.

Exercice 11.17.

Résoudre $(2t+1)y'' + (4t-2)y' - 8y = 0$, en commençant par chercher une solution exponentielle.

Exercice 11.18.

Résoudre l'équation $x^2y'' + 4xy' - (x^2-2)y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en posant $z(x) = x^2y(x)$.

Exercice 11.19.

Trouver la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} \left(x^2+1\right)y'' - 2y = 2x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ en la cherchant sous forme d'une somme de série entière.

Exercice 11.20.

On note $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1. Former une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution. En déduire le développement en série entière de f.
2. Calculer alors la somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2\dbinom{2n}{n}}$.