



12

Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel. On généralise à E la notion de produit scalaire vue dans le cas du plan et de l'espace euclidien.

1 Notion de produit scalaire et de norme sur un espace vectoriel

1.1 Définitions, exemples

Définition 12.1.

Produit scalaire

On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes quels que soient les vecteurs u, u', v, v' de E , et les réels λ, λ' .

- i.* Linéarité à gauche: $\varphi(\lambda u + \lambda' u', v) = \lambda \varphi(u, v) + \lambda' \varphi(u', v)$.
- ii.* Linéarité à droite: $\varphi(u, \lambda v + \lambda' v') = \lambda \varphi(u, v) + \lambda' \varphi(u, v')$.
- iii.* Symétrie: $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.
- iv.* φ est définie positive: $\varphi(u, u) \geq 0$, et $\varphi(u, u) = 0 \iff u = 0_E$.

On dit également qu'un produit scalaire est une **forme bilinéaire**, symétrique et définie positive.

Si φ est un produit scalaire, la quantité $\varphi(x, y)$ sera le plus souvent notée $x \cdot y$, $(x|y)$, $\langle x, y \rangle$ ou (x, y) .

Remarque 12.1.

- ✘ Plutôt que de montrer que φ vérifie *i.* et *ii.*, on commence par montrer que φ vérifie *i.* (linéarité à gauche) puis qu'elle est symétrique (c'est à dire qu'elle vérifie *iii.*). Elle vérifie alors nécessairement *ii.*
- ✘ Il est possible de définir plusieurs produits scalaires différents sur un même espace vectoriel.

Exemple 12.1.

- i.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = (x_1, \dots, x_n)$, $v = (y_1, \dots, y_n)$ dans \mathbb{R}^n .
Alors la relation

$$(u|v) = s \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé **produit scalaire canonique** (ou usuel) sur \mathbb{R}^n .
Si $n = 2$ (resp. 3) on retrouve ainsi le produit scalaire qui avait été défini sur \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3).

- ii.* Soient $a < b$ des réels. Si $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b])$ la relation

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$.

iii. La relation ci-dessus ne définit pas un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

iv. Soient $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ des réels. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ la relation

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

v. La relation ci-dessus ne définit pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

vi. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La relation

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 12.2.

Espace euclidien, espace pré-hilbertien

✗ On appelle **espace vectoriel préhilbertien réel** tout \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

✗ On appelle **espace vectoriel euclidien** tout \mathbb{R} -espace vectoriel **de dimension finie** muni d'un produit scalaire.

Définition 12.3.

Norme associée à un produit scalaire

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$. On appelle **norme** préhilbertienne associée à $(\cdot|\cdot)$, et on note $\|\cdot\|$, l'application définie par

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto (x|x) \end{aligned}$$

Dans la suite, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, et $\|\cdot\|$ désigne la norme associée.

1.2 Propriétés fondamentales

Proposition 12.1.

Pour tout vecteur u de E , on a $(u|0_E) = 0$.

Proposition 12.2.

Propriétés de la norme préhilbertienne

On a les propriétés suivantes, quel que soit le vecteur u de E et le réel λ .

- i. $\|u\| \geq 0$.
- ii. $\|u\| = 0 \iff u = 0_E$.
- iii. $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.

Proposition 12.3.

Propriétés liant la norme au produit scalaire

On a alors les propriétés suivantes, quels que soient les vecteurs u, v de E et le réel λ .

- i. **Formule d'Al-Kashi.** $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$.
- ii. **Identité du parallélogramme.** $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.
- iii. **Formules de polarisation.** $(u|v) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ et $(u|v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$.

Théorème 12.4.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient deux vecteurs u, v de E . On a : $|(u|v)| \leq \|u\| \times \|v\|$.

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve. L'idée est de considérer la fonction polynomiale réelle de degré 2 $f : \lambda \mapsto \|x + \lambda y\|^2$. Le discriminant de celle-ci est alors négatif ou nul. \square

Remarque 12.2.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet, dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, de définir l'angle géométrique (c'est-à-dire compris entre 0 et π) entre deux vecteurs u, v non nuls en posant:

$$\widehat{(u, v)} = \arccos \left(\frac{(u|v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \right).$$

Exemple 12.2.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \int_0^1 f(t)g(t)dt \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \times \sqrt{\int_0^1 g(t)^2 dt}$$

pour toutes fonctions f, g continues sur $[0, 1]$. Et on a égalité si et seulement si f, g sont colinéaires.

Exercice 12.1.

Soient $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$.

Proposition 12.5.**Inégalités triangulaires**

On a les propriétés suivantes, quels que soient les vecteurs u, v de E .

i. **Inégalité triangulaire (ou de Minkowski).** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si u et v sont colinéaires et de même sens.

ii. **Inégalité triangulaire inversée.** $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.

1.3 Notion de norme

Partant des propriétés précédentes, on peut généraliser la notion de norme.

Définition 12.4.

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes quels que soient $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. $N(u) \geq 0$, et $N(u) = 0 \iff u = 0_E$.

ii. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u)$.

iii. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

L'inégalité triangulaire inversée se déduit alors aisément des propriétés ci-dessus en raisonnant comme précédemment.

Exemple 12.3.

✗ La valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} .

✗ La norme préhilbertienne associée à un produit scalaire est bien une norme au sens de la définition ci-dessus.

Définition 12.5.**Vecteur normé**

Soit N une norme sur E . On dit qu'un vecteur $x \in E$ est unitaire ou **normé** si $N(x) = 1$.

Exemple 12.4.

Si $x \neq 0_E$, les vecteurs $\frac{1}{N(x)}x$ et $-\frac{1}{N(x)}x$ sont normés. Ce sont les seuls vecteurs normés colinéaires à x .

Étant donnée une norme, on peut définir une notion de distance.

Définition 12.6.**Distance associée à une norme**

Soit N une norme sur E . On définit une application $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, appelée **distance associée** à N , en posant $d(x, y) = N(x - y)$.

Proposition 12.6.**Propriétés de la distance**

On a alors les propriétés suivantes, quels que soient les vecteurs u, v, w de E .

- i. $d(u, v) = 0 \iff u = v$.
- ii. $d(u, v) = d(v, u)$.
- iii. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

2 Familles de vecteurs et orthogonalité**2.1 Définitions et propriétés élémentaires****Définition 12.7.****Vecteurs orthogonaux**

Deux vecteurs x, y de E sont dit **orthogonaux** si $(x|y) = 0$. Cette propriété sera notée $x \perp y$.

Théorème 12.7.**Théorème de Pythagore**

Soit $(x, y) \in E^2$. On a alors:

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Preuve. Ce fameux théorème se déduit immédiatement et sans difficulté de la formule d'Al-Kashi. □

Définition 12.8.**Famille orthogonale \ orthonormale**

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- ✗ Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont deux-à-deux orthogonaux, c'est-à-dire si $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow (e_i|e_j) = 0$.
- ✗ La famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite **orthonormale** (ou orthonormée) si ses vecteurs sont deux-à-deux orthogonaux et normés, c'est-à-dire si $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow (e_i|e_j) = 0$ et $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$.

Exemple 12.5.

La base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormée pour le produit scalaire usuel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 12.8.**Formule de Pythagore**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthogonale de E . On a alors:

$$\left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2.$$

Proposition 12.9.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (qu'elle soit finie ou pas).

☞ On en déduit directement que toute famille orthonormée est libre.

Exercice 12.2.

Dans cet exercice, on se place dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

On considère la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto a_p \cos(px))_{p \in \mathbb{N}}$.

1. Déterminer pour quelle valeur de $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la famille \mathcal{F} est orthonormée.
2. En déduire que \mathcal{F} est libre.

2.2 Propriétés élémentaires des bases orthonormées en dimension finie

Les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée se calculent aisément: il suffit de projeter celui-ci sur les vecteurs de base.

Théorème 12.10.

Soit E un **espace vectoriel euclidien** et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E . Alors pour tout vecteur $x \in E$ on a

$$x = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i.$$

De même, le produit scalaire de deux vecteurs se calcule aisément dans les bases orthonormées: quitte à passer aux matrices de ces vecteurs, tout se passe comme si on était dans \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique.

Théorème 12.11.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E , et $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ deux vecteurs de E . On a alors les résultats suivants.

$$i. (x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ et } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

ii. En d'autres termes, si X (resp. Y) est la matrice de x (resp. y) dans la base \mathcal{B} , on a $(x|y) = X^\top \times Y$ et $\|x\|^2 = X^\top \times X$.

2.3 Construction de bases orthonormées: le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

La preuve du théorème suivant correspond à la mise en œuvre de l'*algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt*.

Théorème 12.12.

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille libre de vecteurs de E . Il existe alors une unique famille $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E telle que:

- i. La famille $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormée;
- ii. $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$;
- iii. $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(e_k|v_k) > 0$.

Remarque 12.3.

- ✗ Si l'on supprime la condition *iii.*, on perd l'unicité.
- ✗ Le principe de la démonstration doit impérativement être connu, puisqu'à chaque fois que l'on utilise concrètement ce résultat, on le redémontre.
- ✗ En pratique, on commence par construire une famille orthogonale, et on ne la norme qu'à la fin (cela simplifie les calculs).
- ✗ Dès que le cardinal de la famille libre est supérieur à 4, le recours à un outil informatique de calcul est précieux. Pour implémenter cet algorithme, le plus commode est de normer directement les vecteurs et de mémoriser les formules de récurrence suivantes:

$$v_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1, \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, w_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k|v_i)v_i \quad \text{et} \quad v_k = \frac{1}{\|w_k\|} w_k.$$

Exercice 12.3.

Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ de \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique.

Exercice 12.4.

Polynômes de Legendre

On muni $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 12.13.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**. Toute famille orthonormée de E se complète en une base orthonormée de E .

Théorème de la base incomplète orthonormée**Corollaire 12.14.**

Tout **espace vectoriel euclidien** admet une base orthonormée.

3 Orthogonal d'un sous espace vectoriel**Définition 12.9.****Orthogonal**

Soit $A \subset E$.

- ✗ On appelle **orthogonal** de A , et l'on note A^\perp , l'ensemble des vecteurs $x \in E$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A . En d'autres termes on a

$$A^\perp = \{x \in E; \forall a \in A, (x|a) = 0\}.$$

- ✗ On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **orthogonal** à A , si $x \in A^\perp$.

Proposition 12.15.

Soit $A \subset E$. On a les résultats suivants.

- $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.
- A^\perp est un sous-espace vectoriel de E .
- Si A est sous-espace vectoriel de E , $A \cap A^\perp = \{0_E\}$.
- $A \subset A^{\perp\perp}$.

Remarque 12.4.

Le point *i.* établit que 0_E est le seul vecteur orthogonal à tout l'espace. C'est par ailleurs le seul vecteur orthogonal à lui-même.

Théorème 12.16.**Supplémentaire orthogonal**

Soit F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E . Alors $E = F \oplus F^\perp$. En d'autres termes, F^\perp est un supplémentaire de F dans E , appelé le **supplémentaire orthogonal** de F .

Remarque 12.5.

En particulier, dans le cas où E est de dimension finie, on en déduit $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$.

Proposition 12.17.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**, et F un sous-espace vectoriel de E . On a alors $F^{\perp\perp} = F$.

Proposition 12.18.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**, et H un hyperplan de E . Alors il existe un vecteur non nul $v_N \in E$ tel que

$$\forall u \in E, u \in H \iff (u|v_N) = 0.$$

Remarque 12.6.

- ✗ Un tel vecteur v_N est appelé un **vecteur normal** à H .
- ✗ H est entièrement déterminé par la donnée d'un tel vecteur.
- ✗ Si on se place dans une base orthonormée \mathcal{B} de E , et si on appelle (a_1, \dots, a_n) les coordonnées de v_N dans celle-ci, on obtient que H admet $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ pour équation cartésienne dans \mathcal{B} . On retrouve ainsi, dans le cas particulier des espaces euclidiens, un résultat connu.
- ✗ H admet exactement deux vecteurs normaux et normés, qui sont opposés. L'équation obtenue ci-dessus est alors appelée une **équation normale** de H .

4 Projections et symétries orthogonales

Dans cette section, la lettre F désigne un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien quelconque E .

Définition 12.10.

Projecteur orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On appelle **projecteur orthogonal sur F** , et on note p_F , le projecteur sur F parallèlement à F^\perp .

Remarque 12.7.

En tant que projecteur, p_F est linéaire et vérifie $p_F^2 = p_F$, $F^\perp = \text{Ker}(p_F)$, $F = \text{Im}(p_F) = \text{Ker}(p_F - \text{Id}_E)$.

Proposition 12.19.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et p_F le projecteur orthogonal sur F . Pour tout $u \in E$, on a alors $u - p_F(u) \in F^\perp$.

☞ Pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = p_F(x) + x - p_F(x)$, et il suit, par **Pythagore**, que

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2.$$

Exercice 12.5.

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On introduit l'endomorphisme p dont la matrice dans la base canonique de E est donnée par

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation.

Théorème 12.20.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , et (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . On a alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i.$$

Exercice 12.6.

Utiliser cette formule pour retrouver la formule de récurrence nécessaire à l'implémentation de l'algorithme de Gram-Schmidt.

Exercice 12.7.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \right\}$$

- Déterminer une base orthonormale de F .
- Déterminer la matrice M de la projection orthogonale sur F dans \mathcal{B} .

Exercice 12.8.

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

- Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E .
- Préciser la valeur de $\langle X^k, X^j \rangle$, pour $1 \leq k, j \leq n$.
- Déterminer $p_F(X^2)$, où $F = \mathbb{R}_1[X]$. (On pourra procéder de deux façons différentes.)

Théorème 12.21.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors $p_F(x)$ minimise la distance entre x et un vecteur de F , et c'est l'unique vecteur dans ce cas.

On en déduit la définition suivante, qui possède de nombreuses applications.

Définition 12.11.**Distance d'un vecteur à un sous-espace**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. On appelle **distance de x à F** , et on note $d(x, F)$ le réel défini par

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|.$$

Théorème 12.22.**Inégalité de Bessel**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , et (e_1, \dots, e_p) une base orthonormée de F . Pour tout $x \in E$ on a alors $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$, qui s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^p (x|e_i)^2 \leq \|x\|^2.$$

Exercice 12.9.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. Le but de l'exercice est de montrer la propriété suivante:

$$p \text{ projection orthogonale} \iff \forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Montrer le sens \Rightarrow .
2. On veut montrer la réciproque. On suppose donc, que pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$. Soient $(y, z) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p)$.
On introduit la fonction $\varphi : t \mapsto \|y + tz\|^2$.
 - a. Justifier que φ est dérivable sur \mathbb{R} et expliciter $\varphi'(t)$.
 - b. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(0)$. En déduire que $\varphi'(0) = 0$.
 - c. Conclure.

Exercice 12.10.

En revenant à l'**Exercice 12.5**, déterminer la distance de $(1, 1, 1)$ au plan sur lequel on projette.

Exercice 12.11.

Déterminer $\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - \alpha)^2 dt$.

On peut de façon analogue définir la notion de symétrie orthogonale.

Définition 12.12.**Symétrie orthogonale**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . On appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** , et l'on note s_F , la symétrie par rapport à F parallèlement à F^\perp .

Remarque 12.8.

- ✘ En tant que symétrie, s_F est linéaire et vérifie $s_F^2 = \text{Id}_E$, $F^\perp = \text{Ker}(s_F + \text{Id}_E)$, $F = \text{Ker}(s_F - \text{Id}_E)$. On a encore $s_F = 2p_F - \text{Id}$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F .
- ✘ On en déduit notamment que si $u \in E$, alors $u - s_F(u) \in F^\perp$ et $u + s_F(u) \in F$.
- ✘ Dans le cas où E est de dimension finie et $F = H$ est un hyperplan de E , on dit que s_H est la *réflexion* d'hyperplan H .

On a enfin le résultat suivant.

Théorème 12.23.

Soit E un espace vectoriel euclidien, et F un sous-espace vectoriel de E . Les matrices de p_F et s_F dans une base orthonormée sont des matrices symétriques.

Preuve. On commence par prouver que si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq \dim E}$ est une base orthonormée de E , et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors le terme général de la matrice de f dans la base \mathcal{B} est alors $a_{i,j} = (f(e_j) | e_i)$. \square

Remarque 12.9.

Attention, la matrice d'une symétrie n'est pas nécessairement symétrique (il en va de même des projecteurs).

Par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie $S^2 = I_2$ donc c'est la matrice d'une symétrie, bien qu'elle ne soit pas symétrique.

5 Sélection d'exercices**Exercice 12.12.**

Orthonormaliser pour le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^3 la famille formée des vecteurs $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 0)$.

Exercice 12.13.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $u(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^x$, $v(x) = e^x \cos x$, et $w(x) = e^x \sin x$, et on note E le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par (u, v, w) .

1. Montrer que

$$\varphi : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) e^{-2x} dx$$

définit un produit scalaire dans E .

2. Montrer que (u, v, w) en constitue une base orthonormée.

Exercice 12.14.

Soit E espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$. Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $(a | x) = \lambda$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice 12.15.

1. Montrer que $\varphi : (A, B) \mapsto \text{Tr}(A^\top \cdot B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices respectivement symétriques et antisymétriques réelles d'ordre n , sont des supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Exercice 12.16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et x_1, x_2, \dots, x_n des réels strictement positifs de somme 1. Montrer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$.

Exercice 12.17.

1. Montrer que $\phi(f, g) = \int_0^1 (fg + f'g')$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' = f\}$ sont orthogonaux.
3. Montrer que V et W supplémentaires.

Exercice 12.18.

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 (x \ln x - ax - b)^2 dx \right)$.

Exercice 12.19.

1. Montrer que $\phi : (P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$, et calculer $\phi(X^p, X^q)$ où $p, q \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt.$$

Exercice 12.20.

On muni $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $\left(\sum_{i=0}^3 a_i X^i \mid \sum_{j=0}^3 b_j X^j \right) = \sum_{i=0}^3 a_i b_i$, et on considère le sous-espace

$$H = \{P \in E, P(1) = 0\}.$$

1. Trouver une base et la dimension de H .
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur H .

Exercice 12.21.

Dans \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire usuel, soit $\mathcal{P} = \text{Vect}(u, v)$ avec $u(1, 1, 1, 0)$ et $v(1, 0, 0, -1)$.

1. Déterminer une base orthonormée de \mathcal{P} .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} .

Exercice 12.22.

Soit E un espace préhilbertien réel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Démontrer les résultats suivants (ils sont indépendants).

1. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ si E est de dimension finie.

Exercice 12.23.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $x, y \in E$.

1. Montrer que si $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que y soit le projeté orthogonal de x sur H .
2. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que y soit l'image de x par la symétrie orthogonale par rapport à H .

Exercice 12.24.

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Soient u, v deux vecteurs unitaires de E . Montrer $u + v \perp u - v$.
2. Soit f un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité, c'est-à-dire:

$$x \perp y \implies f(x) \perp f(y).$$

Montrer que si u, v sont deux vecteurs unitaires, alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.

3. En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\|f(x)\| = a\|x\|$ pour tout $x \in E$. On dira que f est une similitude vectorielle de rapport a .

Exercice 12.25.

Extrait de ECRICOME ECS, 2020

On s'intéresse à la suite de polynômes (T_n) , appelés *polynômes de Tchebychev*¹, définie par $T_0 = 1, T_1 = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. a. Expliciter T_2 et T_3 .
b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de T_n .
c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (T_0, T_1, \dots, T_n) forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

3. a. Montrer que pour tout couple $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente.

b. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ce produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

c. Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, alors $\int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) dx = 0$.

d. Montrer que si n et m sont deux entiers naturels distincts, $\langle T_n, T_m \rangle = 0$.

(Indication: On pourra procéder au changement de variable $t = \cos(x)$ après avoir justifié sa validité.)

e. Montrer que:

$$\|T_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } n \geq 1 \\ \pi, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

f. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

4. Soit n un entier non nul. On définit d_n la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$d_n = \inf \{ \|X^n - P\| : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \}.$$

a. Montrer alors que : $d_n = \frac{|\langle X^n, T_n \rangle|}{\|T_n\|}$.

b. Déterminer en particulier la valeur de d_2 .