13 Espaces préhilbertiens réels

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On généralise à E la notion de produit scalaire vue dans le cas du plan et de l'espace euclidien.

1 Notion de produit scalaire et de norme sur un espace vectoriel

1.1 Définitions, exemples

Définition 13.1. **Produit scalaire**

On appelle **produit scalaire** sur E toute application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes quels que soient les vecteurs u, u', v, v' de E, et les réels λ, λ'.

i. Linéarité à gauche: $\varphi(\lambda u + \lambda' u', v) = \lambda\varphi(u, v) + \lambda'\varphi(u', v)$.

ii. Linéarité à droite: $\varphi(u, \lambda v + \lambda' v') = \lambda\varphi(u, v) + \lambda'\varphi(u, v')$.

iii. Symétrie: $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

iv. φ est définie positive: $\varphi(u, u) \geq 0$, et $\varphi(u, u) = 0 \iff u = 0_E$.

On dit également qu'un produit scalaire est une **forme bilinéaire**, symétrique et définie positive.

Si φ est un produit scalaire, la quantité $\varphi(x, y)$ sera le plus souvent notée $x \cdot y$, $(x|y)$, $< x, y >$ ou (x, y).

Remarque 13.1.

✗ Plutôt que de montrer que φ vérifie *i.* et *ii.*, on commence par montrer que φ vérifie `i.` (linéarité à gauche) puis qu'elle est symétrique (c'est à dire qu'elle vérifie *iii.*). Elle vérifie alors nécessairement *ii.*

✗ Il est possible de définir plusieurs produits scalaires différents sur un même espace vectoriel.

Exemple 13.1.

i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.
Alors la relation
$$(u|v) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, appelé **produit scalaire canonique** (ou usuel) sur $\mathbb{R}^n$.
Si $n = 2$ (resp. 3) on retrouve ainsi le produit scalaire qui avait été défini sur $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$).

ii. Soient $a < b$ des réels. Si $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b])$ la relation
$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b])$.

iii. La relation ci-dessus ne définit pas un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

iv. Soient $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels. Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ la relation

$$(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

v. La relation ci-dessus ne définit pas un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

vi. Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La relation

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 13.2. **Espace euclidien, espace pré-hilbertien**

✗ On appelle **espace vectoriel préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

✗ On appelle **espace vectoriel euclidien** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel **de dimension finie** muni d'un produit scalaire.

Définition 13.3. **Norme associée à un produit scalaire**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$. On appelle **norme** préhilbertienne associée à $(.|.)$, et on note $\|\cdot\|$, l'application définie par

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\| & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \sqrt{(x|x)} \end{array}$$

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$, et $\|\cdot\|$ désigne la norme associée.

1.2 Propriétés fondamentales

Proposition 13.1.

Pour tout vecteur u de E, on a $(u|0_E) = 0$.

Proposition 13.2. **Propriétés de la norme préhilbertienne**

On a les propriétés suivantes, quel que soit le vecteur u de E et le réel λ.

i. $\|u\| \geq 0$.

ii. $\|u\| = 0 \iff u = 0_E$.

iii. $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.

Proposition 13.3. **Propriétés liant la norme au produit scalaire**

On a alors les propriétés suivantes, quels que soient les vecteurs u, v de E et le réel λ.

i. **Formule d'Al-Kashi.** $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$.

ii. **Identité du parallélogramme.** $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

iii. **Formules de polarisation.** $(u|v) = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$ et $(u|v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

Théorème 13.4. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient deux vecteurs u, v de E. On a : $|(u|v)| \leq \|u\| \times \|v\|$.
De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

Preuve. L'idée est de considérer la fonction polynomiale réelle de degré 2 $f : \lambda \longmapsto \|x + \lambda y\|^2$. Le discriminant de celle-ci est alors négatif ou nul. □

Remarque 13.2.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet, dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, de définir l'angle géométrique (c'est-à-dire compris entre 0 et π) entre deux vecteurs u, v non nuls en posant:

$$\widehat{(u,v)} = \arccos\left(\frac{(u|v)}{\|u\| \cdot \|v\|}\right).$$

Exemple 13.2.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_0^1 g(t)^2\mathrm{d}t}$$

pour toutes fonctions f, g continues sur $[0,1]$. Et on a égalité si et seulement si f, g sont colinéaires.

Exercice 13.1.

Soient $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$.

Proposition 13.5. **Inégalités triangulaires**
On a les propriétés suivantes, quels que soient les vecteurs u, v de E.
i. **Inégalité triangulaire (ou de Minkowski).** $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si u et v sont colinéaires et de même sens.
ii. **Inégalité triangulaire inversée.** $|\ \|u\| - \|v\|\ | \leq \|u - v\|$.

1.3 Notion de norme

Partant des propriétés précédentes, on peut généraliser la notion de norme.

Définition 13.4.
On appelle **norme** sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes quels que soient $(u,v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. $N(u) \geq 0$, et $N(u) = 0 \iff u = 0_E$.
ii. $N(\lambda u) = |\lambda| \cdot N(u)$.
iii. $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$.

L'inégalité triangulaire inversée se déduit alors aisément des propriétés ci-dessus en raisonnant comme précédemment.

Exemple 13.3.

- ✗ La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.
- ✗ La norme préhilbertienne associée à un produit scalaire est bien une norme au sens de la définition ci-dessus.

Définition 13.5. **Vecteur normé**
Soit N une norme sur E. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est unitaire ou **normé** si $N(x) = 1$.

Exemple 13.4.
Si $x \neq 0_E$, les vecteurs $\frac{1}{N(x)}x$ et $-\frac{1}{N(x)}x$ sont normés. Ce sont les seuls vecteurs normés colinéaires à x.

Étant donnée une norme, on peut définir une notion de distance.

Définition 13.6. **Distance associée à une norme**
Soit N une norme sur E. On définit une application $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$, appelée **distance associée** à N, en posant $d(x,y) = N(x-y)$.

Proposition 13.6. **Propriétés de la distance**

On a alors les propriétés suivantes, quels que soient les vecteurs u, v, w de E.

i. $d(u,v) = 0 \iff u = v$.
ii. $d(u,v) = d(v,u)$.
iii. $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

2 Familles de vecteurs et orthogonalité

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 13.7. **Vecteurs orthogonaux**

Deux vecteurs x, y de E sont dit **orthogonaux** si $(x|y) = 0$. Cette propriété sera notée $x \perp y$.

Théorème 13.7. **Théorème de Pythagore**

Soit $(x,y) \in E^2$. On a alors:

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Preuve. Ce fameux théorème se déduit immédiatement et sans difficulté de la formule d'Al-Kashi. □

Définition 13.8. **Famille orthogonale \ orthonormale**

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

✗ Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite **orthogonale** si ses vecteurs sont deux-à-deux orthogonaux, c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow (e_i|e_j) = 0$.

✗ La famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite **orthonormale** (ou orthonormée) si ses vecteurs sont deux-à-deux orthogonaux et normés, c'est-à-dire si $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Rightarrow (e_i|e_j) = 0$ et $\forall i \in I,\ \|e_i\| = 1$.

Exemple 13.5.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 13.8. **Formule de Pythagore**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthogonale de E. On a alors:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2.$$

Proposition 13.9.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (qu'elle soit finie ou pas).

☞ On en déduit directement que toute famille orthonormée est libre.

Exercice 13.2.

Dans cet exercice, on se place dans l'espace préhilbertien $\mathcal{C}^0([0, 2\pi])$ muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

On considère la famille $\mathcal{F} = (x \mapsto a_p \cos(px))_{p \in \mathbb{N}}$.

1. Déterminer pour quelle valeur de $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ la famille $\mathcal{F}$ est orthonormée.
2. En déduire que $\mathcal{F}$ est libre.

2.2 Propriétés élémentaires des bases orthonormées en dimension finie

Les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée se calculent aisément: il suffit de projeter celui-ci sur les vecteurs de base.

Théorème 13.10.

Soit E un **espace vectoriel euclidien** et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$ on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)e_i.$$

De même, le produit scalaire de deux vecteurs se calcule aisément dans les bases orthonormées: quitte à passer aux matrices de ces vecteurs, tout se passe comme si on était dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Théorème 13.11.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**, $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E, et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E. On a alors les résultats suivants.

i. $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

ii. En d'autres termes, si X (resp. Y) est la matrice de x (resp. y) dans la base $\mathcal{B}$, on a $(x|y) = X^\top \times Y$ et $\|x\|^2 = X^\top \times X$.

2.3 Construction de bases orthonormées: le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

La preuve du théorème suivant correspond à la mise en œuvre de l'*algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt*.

Théorème 13.12. **Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe alors une unique famille $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs de E telle que:

i. La famille $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormée;

ii. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$;

iii. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $(e_k|v_k) > 0$.

Remarque 13.3.

- ✗ Si l'on supprime la condition *iii.*, on perd l'unicité.
- ✗ Le principe de la démonstration doit impérativement être connu, puisqu'à chaque fois que l'on utilise concrètement ce résultat, on le redémontre.
- ✗ En pratique, on commence par construire une famille orthogonale, et on ne la norme qu'à la fin (cela simplifie les calculs).
- ✗ Dès que le cardinal de la famille libre est supérieur à 4, le recours à un outil informatique de calcul est précieux. Pour implémenter cet algorithme, le plus commode est de normer directement les vecteurs et de mémoriser les formules de récurrence suivantes:

$$v_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1, \qquad \forall k \in [\![2, n]\!],\ w_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k|v_i)v_i \quad \text{et} \quad v_k = \frac{1}{\|w_k\|} w_k.$$

Exercice 13.3.

Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

Exercice 13.4. **Polynômes de Legendre**

On muni $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 13.13. **Théorème de la base incomplète orthonormée**

Soit E un **espace vectoriel euclidien**. Toute famille orthonormée de E se complète en une base orthonormée de E.

Corollaire 13.14.

Tout **espace vectoriel euclidien** admet une base orthonormée.

3 Orthogonal d'un sous espace vectoriel

Définition 13.9. **Orthogonal**

Soit $A \subset E$.

- ✗ On appelle **orthogonal** de A, et l'on note $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs $x \in E$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A. En d'autres termes on a
$$A^\perp = \{x \in E;\ \forall a \in A,\ (x|a) = 0\}.$$
- ✗ On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **orthogonal** à A, si $x \in A^\perp$.

Proposition 13.15.

Soit $A \subset E$. On a les résultats suivants.

i. $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.
ii. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
iii. Si A est sous-espace vectoriel de E, $A \cap A^\perp = \{0_E\}$.
iv. $A \subset A^{\perp^\perp}$.

Remarque 13.4.

Le point *i.* établit que 0_E est le seul vecteur orthogonal à tout l'espace. C'est par ailleurs le seul vecteur orthogonal à lui-même.

Théorème 13.16. **Supplémentaire orthogonal**

Soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E. Alors $E = F \oplus F^\perp$. En d'autres termes, $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E, appelé **le supplémentaire orthogonal** de F..

Remarque 13.5.

En particulier, dans le cas où E est de dimension finie, on en déduit $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$.

Proposition 13.17.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**, et F un sous-espace vectoriel de E. On a alors $F^{\perp^\perp} = F$.

Proposition 13.18.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**, et H un hyperplan de E. Alors il existe un vecteur non nul $v_N \in E$ tel que
$$\forall u \in E,\ u \in H \iff (u|v_N) = 0.$$

Remarque 13.6.

- ✗ Un tel vecteur v_N est appelé un **vecteur normal** à H.
- ✗ H est entièrement déterminé par la donnée d'un tel vecteur.
- ✗ Si on se place dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, et si on appelle $(a_1, \dots, a_n)$ les coordonnées de v_N dans celle-ci, on obtient que H admet $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ pour équation cartésienne dans $\mathcal{B}$. On retrouve ainsi, dans le cas particulier des espaces euclidiens, un résultat connu.
- ✗ H admet exactement deux vecteurs normaux et normés, qui sont opposés. L'équation obtenue ci-dessus est alors appelée une *équation normale* de H.

4 Projections et symétries orthogonales

Dans cette section, la lettre F désigne un sous-espace vectoriel **de dimension finie** d'un espace préhilbertien quelconque E.

Définition 13.10. **Projcteur orthogonal**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projecteur orthogonal sur** F, et on note p_F, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 13.7.

En tant que projecteur, p_F est linéaire et vérifie $p_F^2 = p_F$, $F^\perp = \mathrm{Ker}(p_F)$, $F = \mathrm{Im}(p_F) = \mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 13.19.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et p_F le projecteur orthogonal sur F. Pour tout $u \in E$, on a alors $u - p_F(u) \in F^\perp$.

☞ Pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = p_F(x) + x - p_F(x)$, et il suit, par **Pythagore**, que

$$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||x - p_F(x)||^2.$$

Exercice 13.5.

On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On introduit l'endomorphisme p dont la matrice dans la base canonique de E est donnée par

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation.

Théorème 13.20.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F. On a alors

$$\forall x \in E,\ \ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

Exercice 13.6.

Utiliser cette formule pour retrouver la formule de récurrence nécessaire à l'implémentation de l'algorithme de Gram-Schmidt.

Exercice 13.7.

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice M de la projection orthogonale sur F dans $\mathcal{B}$.

Exercice 13.8.

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.
2. Préciser la valeur de $\langle X^k, X^j \rangle$, pour $1 \leq k, j \leq n$.
3. Déterminer $p_F(X^2)$, où $F = \mathbb{R}_1[X]$. (*On pourra procéder de deux façons différentes.*)

Théorème 13.21.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors $p_F(x)$ minimise la distance entre x et un vecteur de F, et c'est l'unique vecteur dans ce cas.

On en déduit la définition suivante, qui possède de nombreuses applications.

Définition 13.11. **Distance d'un vecteur à un sous-espace**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. On appelle **distance de** x à F, et on note $\mathrm{d}(x, F)$ le réel défini par

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\|.$$

Théorème 13.22. **Inégalité de Bessel**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormée de F. Pour tout $x \in E$ on a alors $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$, qui s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 \leq \|x\|^2.$$

Exercice 13.9.

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection. Le but de l'exercice est de montrer la propriété suivante:

$$p \text{ projection orthogonale } \iff \forall x \in E,\ ||p(x)|| \leq ||x||.$$

1. Montrer le sens $\Rightarrow$.

2. On veut montrer la réciproque. On suppose donc, que pour tout $x \in E$, on a $||p(x)|| \leq ||x||$. Soient $(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$.
On introduit la fonction $\varphi :\ t \mapsto ||y + tz||^2$.
 - **a.** Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $\varphi'(t)$.
 - **b.** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \geq \varphi(0)$. En déduire que $\varphi'(0) = 0$.
 - **c.** Conclure.

Exercice 13.10.

En revenant à l'**Exercice 13.5**, déterminer la distance de $(1, 1, 1)$ au plan sur lequel on projette.

Exercice 13.11.

Déterminer $\displaystyle\min_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - \alpha)^2 \mathrm{d}t$.

On peut de façon analogue définir la notion de symétrie orthogonale.

Définition 13.12. **Symétrie orthogonale**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **symétrie orthogonale par rapport à** F, et l'on note s_F, la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 13.8.

- ✗ En tant que symétrie, s_F est linéaire et vérifie $s_F^2 = \mathrm{Id}_E$, $F^\perp = \mathrm{Ker}(s_F + \mathrm{Id}_E)$, $F = \mathrm{Ker}(s_F - \mathrm{Id}E)$. On a encore $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F.
- ✗ On en déduit notamment que si $u \in E$, alors $u - s_F(u) \in F^\perp$ et $u + s_F(u) \in F$.
- ✗ Dans le cas où E est de dimension finie et $F = H$ est un hyperplan de E, on dit que s_H est la *réflexion* d'hyperplan H.

On a enfin le résultat suivant.

Théorème 13.23.

Soit E un **espace vectoriel euclidien**, et F un sous-espace vectoriel de E. Les matrices de p_F et s_F dans une base orthonormée sont des matrices symétriques.

Preuve. On commence par prouver que si $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \| eqn}$ est une base orthonormée de E, et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors le terme général de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est alors $a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$. □

Remarque 13.9.

Attention, la matrice d'une symétrie n'est pas nécessairement symétrique (il en va de même des projecteurs). Par exemple,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifie $S^2 = I_2$ donc c'est la matrice d'une symétrie, bien qu'elle ne soit pas symétrique.

5 Sélection d'exercices

Exercice 13.12.

Orthonormaliser pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$ la famille formée des vecteurs $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 0)$.

Exercice 13.13.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^x$, $v(x) = e^x \cos x$,et $w(x) = e^x \sin x$, et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par (u, v, w).

1. Montrer que
$$\varphi : (f, g) \mapsto \langle f \mid g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\ g(x)\ e^{-2x} \mathrm{d}x$$
définit un produit scalaire dans E.
2. Montrer que (u, v, w) en constitue une base orthonormée.

Exercice 13.14.

Soit E espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$. Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $(a|x) = \lambda$ d'inconnue $x \in E$.

Exercice 13.15.

1. Montrer que $\varphi : (A, B) \mapsto \operatorname{Tr}\left(A^\top \cdot B\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que les ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices respectivement symétriques et antisymétriques réelles d'ordre n, sont des supplémentaires orthogonaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.

Exercice 13.16.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Exercice 13.17.

1. Montrer que $\phi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f'' = f\}$ sont orthogonaux.
3. Montrer que V et W supplémentaires.

Exercice 13.18.

Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 (x \ln x - ax - b)^2 \, \mathrm{d}x \right)$.

Exercice 13.19.

1. Montrer que $\phi : (P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire dans $\mathbb{R}[X]$, et calculer $\phi(X^p, X^q)$ où $p,q \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 13.20.

On muni $E = \mathbb{R}_3\left[X\right]$ du produit scalaire défini par $\left(\sum_{i=0}^{3} a_i X^i \,\middle|\, \sum_{j=0}^{3} b_j X^j\right) = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$, et on considère le sous-espace $H = \{P \in E\,,\ P\left(1\right) = 0\}$.

1. Trouver une base et la dimension de H.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur H.

Exercice 13.21.

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, soit $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\ (u,v)$ avec $u\,(1,1,1,0)$ et $v\,(1,0,0,-1)$.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 13.22.

Soit E un espace préhilbertien réel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer les résultats suivants (ils sont indépendants).

1. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$ si E est de dimension finie.

Exercice 13.23.

Soit E un espace vectoriel euclidien et $x, y \in E$.

1. Montrer que si $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que y soit le projeté orthogonal de x sur H.
2. Montrer que si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que y soit l'image de x par la symétrie orthogonale par rapport à H.

Exercice 13.24.

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Soient u, v deux vecteurs unitaires de E. Montrer $u + v \perp u - v$.
2. Soit f un endomorphisme non nul de E conservant l'orthogonalité, c'est-à-dire:
$$x \perp y \Longrightarrow f(x) \perp f(y).$$
Montrer que si u, v sont deux vecteurs unitaires, alors $\|f(u)\| = \|f(v)\|$.
3. En déduire qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $\|f(x)\| = a\|x\|$ pour tout $x \in E$. On dira que f est une similitude vectorielle de rapport a.