Math PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

15 Isométries d'un espace euclidien

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$ dont le produit scalaire sera noté $(\cdot|\cdot)$.
On notera sans distinction (mais avec discernement) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on rappelle que $\langle X, Y \rangle = X^\top \cdot Y$.
La norme associé à tout produit scalaire sera toujours notée $\| \cdot \|$.

1 Matrices orthogonales

1.1 Généralités

Définition 15.1. **Matrices orthogonales, groupe orthogonal**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice **orthogonale** d'ordre n si :

$$M \times M^\top = M^\top \times M = I_n.$$

On notera $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est appelé le **groupe orthogonal d'ordre** n.

Proposition 15.1. **Propriétés immédiates**

On a les résultats suivants.

i. Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M) = \pm 1$.
ii. $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,, alors M est inversible et $M^{-1} = M^\top$.
iii. $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $M \times M^\top = I_n$ si et seulement si $M^\top \times M = I_n$
iv. $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
v. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit matriciel.
vi. Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $M^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (ou encore $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par passage à l'inverse).

Remarque 15.1.

Les propriétés *iv.*, *v.* et *vi.* montrent que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ possède une *structure de groupe* mais cette notion n'est pas au programme en **PT**.

Définition 15.2. **Groupe spécial orthogonal**

On introduit et note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) : \det(M) = 1\}$, et cet ensemble est appelé le **groupe spécial orthogonal**.

Proposition 15.2.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de M et $L_1, \dots, L_n$ ses vecteurs lignes. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i. $M \in \mathcal{O}_n(R)$.
ii. $C_1, \dots, C_n$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
iii. $L_1, \dots, L_n$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Preuve. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff M^\top M = I_n \iff \forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad \left(M^\top M\right)_{i,j} = \delta_{i,j}$$
$$\iff \forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} m_{k,i} m_{k,j} = C_i^\top C_j = \delta_{i,j}$$

Le même calcul appliqué à $M^\top$ donne le résultat pour les lignes de M. □

Exemple 15.1.

Les matrices $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Le résultat suivant montre que les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre deux bases orthonormées.

Corollaire 15.3.
Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, $\mathcal{B}'$ une base de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Alors, $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Méthode 15.1.
Si P est une matrice de changement de bases orthonormées, alors son inverse est $P^{-1} = P^\top$ et donc il s'obtient sans calcul.

1.2 Orientation d'un espace euclidien

Définition 15.3. **Orientation de E**

i. Deux bases orthonormées $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E sont dites de **même orientation** (ou de même sens) si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de déterminant 1.

ii. Deux bases orthonormées $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E sont dites d' **orientation contraire** (ou de sens contraire) si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est de déterminant -1.

iii. **Orienter** E, c'est choisir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E comme référence. On dira alors que toute base de même sens est **directe**, et que toute base de sens contraire est **indirecte**.

Remarque 15.2.
Dans le plan, on choisit le plus souvent le sens trigonométrique, et dans l'espace le sens *des trois doigts de la main droite*. Mais ce n'est pas une obligation.

Exemple 15.2.
On oriente l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ par la base canonique (e_1, e_2).
Les bases (e_2, e_1) et $(-e_1, e_2)$ sont indirectes.
Les bases $(e_2, -e_1)$ et $(-e_1, -e_2)$ sont directes. La base $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2)\right)$ est directe.

Théorème 15.4.
Soit H un hyperplan de E $(h_1, \dots, h_{n-1})$ une base orthonormée de H et u un vecteur unitaire dirigeant $H^\perp$.
Alors, $(h_1, \dots, h_{n-1}, u)$ et $(h_1, \dots, h_{n-1}, -u)$ sont deux bases orthonormées de E de sens contraires.

Remarque 15.3.
On en déduit que pour définir un angle orienté dans un hyperplan, il faut d'abord orienter l'hyperplan en choisissant un vecteur normal.

Méthode 15.2. **Orientation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$**

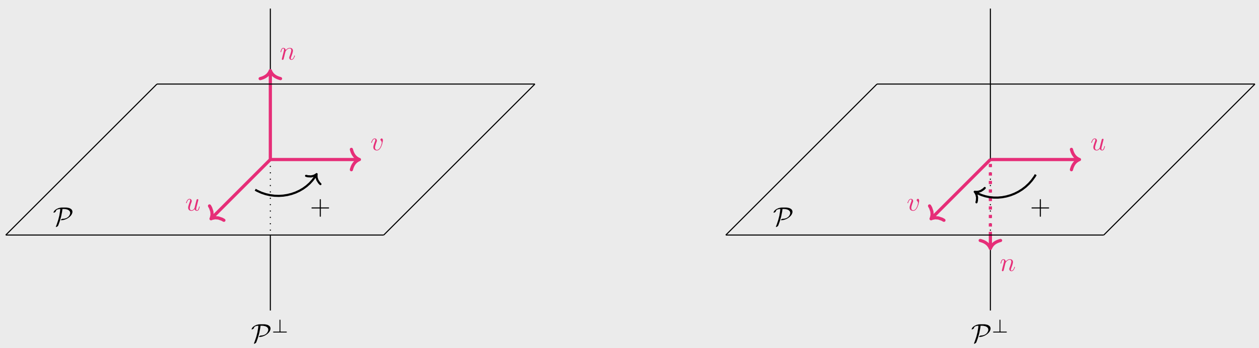
- ✗ Orienter une droite de $\mathbb{R}^3$ consiste à choisir un vecteur unitaire (de norme 1) de cette droite.
- ✗ Orienter un plan P de $\mathbb{R}^3$ consiste à choisir une base orthonormée de $\mathcal{P}$.

De manière équivalente il suffit de choisir un vecteur unitaire n normal à P (et une orientation de $\mathbb{R}^3$).
En effet ce vecteur induit une orientation sur le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(n)^{\perp}$. Pour toutes bases orthonormées $(u,v),(u',v')$ de P, on a en effet:

$$\det_{(u,v)}(u',v') = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det_{(u,v,n)}(u',v',n)$$

Par conséquent les bases $(u,v),(u',v')$ de $\mathcal{P}$ ont la même orientation si et seulement si les bases $(u,v,n),(u',v',n)$ de $\mathbb{R}^3$ ont la même orientation. On décrète que (u,v) est une base directe de $\mathcal{P}$ si (u,v,n) est une base directe de $\mathbb{R}^3$.

Modifier le choix du vecteur unitaire normal à $\mathcal{P}$ modifie l'orientation de $\mathcal{P}$.



Définition 15.4. **Produit mixte**

Soit E un espace euclidien orienté par le choix d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n)$. Soient $x_1,\ldots,x_n$ des vecteurs de E. On appelle **produit mixte** de ces n vecteurs le nombre :

$$[x_1,\ldots,x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1,\ldots,x_n).$$

Il est indépendant de la base orthonormée directe choisie.

On vérifie que le produit mixte est en effet indépendant de la b.o.n directe choisie.
Soient $\mathcal{B}'$ est une autre base orthonormée directe de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, qui vérifie donc $\det(P) = 1$.
On a alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,...,x_n) = \det(P)\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}.$$

Remarque 15.4.

- ✗ On a mentionné dans le **Chapitre 6** que le produit mixte $[x,y]$ dans $\mathbb{R}^2$peut être interprété comme comme l'aire algébrique du parallélogramme engendré par les vecteurs (x,y).
- ✗ De même, on a interprété le produit mixte $[x,y,z]$ dans $\mathbb{R}^3$ comme le volume algébrique du parallélépipède engendré par les vecteurs (x,y,z).

1.3 Produit vectoriel en dimension 3

Dans tout ce paragraphe on considère un espace euclidien E de dimension 3.
Soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base orthonormée directe de E.

Définition 15.5. **Produit vectoriel**

Soient $x, y \in E$ de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
On définit le **produit vectoriel** $x \wedge y$ des vecteurs x, y le vecteur de coordonnées dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Proposition 15.5. **Propriétés du produit vectoriel et lien avec le produit mixte**

On a les résultats suivants :

i. $x \wedge y$ est orthogonal au plan $\operatorname{Vect}(x, y)$: $(x \wedge y \mid x) = 0$ et $(x \wedge y \mid y) = 0$.
ii. $x \wedge y = 0_E$ si et seulement si (x, y) est liée.
iii. $(x \wedge y \mid z) = \det(x, y, z) = [x, y, z]$.

Remarque 15.5.

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut de manière équivalente définir le produit vectoriel $x \wedge y$ comme l'unique vecteur directement orthogonal au plan $\operatorname{Vect}(x, y)$ de norme $\|x\| \cdot \|y\| \cdot |\sin(x, y)|$.
On retrouve alors géométriquement l'interprétation du produit produit mixte $[x, y, z] = (x \wedge y \mid z)$ comme le volume orienté du parallélépipède construit sur (x, y, z).

Théorème 15.6. **Base orthonormée directe de E**

Soit (x, y) une famille orthonormale de E. Alors $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormée directe de E.

2 Théorème spectral : réduction des matrices symétriques réelles

On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 15.7.

Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de A. Alors les sous-espaces propres E_λ et E_μ associés sont orthogonaux.

Preuve. Soient $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres de A et $(X, Y) \in E_\lambda \times E_\mu$. Alors

$$\lambda\mu\langle X, Y\rangle = \langle \lambda AX, AY\rangle = (AX)^\top AY = X^\top A^\top AY = X^\top A^2 Y = \mu^2\langle X, Y\rangle.$$

Par symétrie, on obtient

$$\lambda\mu\langle X, Y\rangle = \mu^2\langle X, Y\rangle = \lambda^2\langle X, Y\rangle.$$

Comme λ et μ sont distinctes, elles ne peuvent être toutes deux nulles. Supposons, sans perte de généralité que $\mu \neq 0$.

- ✗ Si $\lambda = 0$ alors $0 = \lambda\mu\langle X, Y\rangle = \mu^2\langle X, Y\rangle$ donc $\langle X, Y\rangle = 0$ et X et Y sont bien orthogonaux.
- ✗ Si $\lambda \neq 0$ alors
$$0 = \lambda\mu\langle X, Y\rangle = \mu^2\langle X, Y\rangle \iff 0 = \mu(\lambda - \mu)\langle X, Y\rangle$$
ce qui implique, car $\lambda \neq \mu$, que $\langle X, Y\rangle = 0$ et X et Y sont encore orthogonaux.

□

Théorème 15.8. **Théorème spectral**

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Preuve. **Résultat admis**.

Néanmoins, on ne résiste pas à l'envie de proposer une preuve dans le cas particulier et simple où $n = 2$. Pour le plaisir.
Soit $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Observons que A est toujours diagonalisable. En effet, son polynôme caractéristique vaut

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + \left(ac - b^2\right).$$

Ce dernier a pour discriminant

$$\Delta = (a+c)^2 - 4\left(ac - b^2\right) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Ainsi, A admet toujours au moins une valeur propre réelle. Distinguons deux cas.

- ✗ Si $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2 = 0$. Ceci signifie que $a = c$ et $b = 0$, et donc que A est en fait la matrice aI_2 qui est déjà diagonale, on peut évidemment l'écrire comme $A = I_2 \cdot A \cdot I_2^\top$.

- ✗ Si $\Delta > 0$. Dans ce cas, χ_A possède deux racines distinctes et donc A admet deux valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable.
  Les deux sous-espaces propres sont de dimension 1. Il suffit de normaliser un vecteur propre (non nul donc) associé à chaque valeur propre. Par le résultat qui précède, la famille obtenue par concaténation des deux vecteurs normalisés est orthogonale (et libre) et forme donc une base orthonormale de vecteurs propres de A.

Cette preuve ne s'étend hélas pas au cas $n > 2$ où cela devient plus compliqué. □

Remarque 15.6. **Réciproque**

Observons que la réciproque est vraie et facile à montrer ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable dans une base orthonormée, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^\top$. Mais alors, D étant bien entendu symétrique en tant que matrice diagonale, on a

$$A^\top = \left(PDP^\top\right)^\top = \left(P^\top\right)^\top D^\top P^\top = PDP^\top = A.$$

Remarque 15.7. **À retenir**

Si A est une matrice symétrique réelle:

- ✗ toutes les valeurs propres de A sont réelles ;
- ✗ il existe une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A ;
- ✗ il existe donc une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1} = PDP^\top$.

On dit que la matrice A est *orthogonalement diagonalisable*.

Méthode 15.3. **Diagonalisation en B.O.N**

En pratique, pour diagonaliser une matrice symétrique en base orthonormée, on procède comme suit :

i. on dit que la matrice est symétrique **réelle** donc elle est diagonalisable;
ii. on cherche ses valeurs propres ;
iii. On détermine une B.O.N $\mathcal{B}_i$ de chaque sous-espace propre (éventuellement à l'aide du procédé de Gram-Schmidt)
iv. La base $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_i$ est une B.O.N de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
v. La matrice de passage P de la base canonique vers cette base est orthogonale et on a

$$P^{-1}AP = P^\top AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_1, ..., \lambda_\ell, ..., \lambda_\ell),$$

où chaque λ_i est répété un nombre de fois correspondant à sa multiplicité.

Exercice 15.1.

Diagonaliser en base orthonormée la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Isométries vectorielles

Définition 15.6. **Isométrie vectorielle**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est une **isométrie vectorielle** si :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|,$$

c'est à dire si f préserve la norme.
On notera $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles sur E.

Exemple 15.3.

- ✗ Id_E est une isométrie.
- ✗ Une projection orthogonale est une isométrie si et seulement si c'est l'identité.

Exercice 15.2.
Dans chaque cas, justifier que f est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son spectre :

i. $f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$; *ii.* $f(x,y) = (-y,x)$; *iii.* $f(x,y) = (y,x)$.

Proposition 15.9.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, $f \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si f préserve le produit scalaire, c'est à dire si et seulement si
$$\forall x,y \in E,\ (f(x)|\, f(y)) = (x|\, y).$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- ✗ Supposons que f préserve le produit scalaire. Soit $x \in E$. $\|f(x)\|^2 = (f(x)|\, f(x)) = (x|\, x) = \|x\|^2$ donc f préserve la norme et $f \in \mathcal{O}(E)$.

- ✗ Supposons que $f \in \mathcal{O}(E)$. Soient $x,y \in E$. On utilise l'identité de polarisation :
$$\begin{aligned}(f(x)|\, f(y)) &= \frac{1}{4}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (x|\, y)\end{aligned}$$
f préserve donc le produit scalaire.

□

Théorème 15.10.
Une symétrie est une isométrie si et seulement si elle est orthogonale.

Preuve. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

- ✗ Si s est orthogonale, alors $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont orthogonaux. Soit alors $x \in E$ rel que $x = y+z$ avec $(y,z) \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) \times \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ et $y \perp z$. Comme $s(x) = y - z$, on a, par Pythagore
$$\|s(x)\|^2 = \|y-z\|^2 = \|y\|^2 + \|-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y+z\|^2 = \|x\|^2$$
et donc $s \in \mathcal{O}(E)$.
- ✗ Supposons que $s \in \mathcal{O}(E)$. Montrons que $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont orthogonaux. Soit $(y,z) \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) \times \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$. Alors, comme s préserve le produit scalaire,
$$(y|\, z) = (s(y)|\, s(z)) = (y|\, -z) = -(y|\, z)$$
donc $(y|\, z) = 0$ et s est bien orthogonale.

□

Théorème 15.11. **Structure de groupe**

i. $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$.
ii. Si $f \in \mathcal{O}(E)$ alors f est bijective et $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
iii. $\mathcal{O}(E)$ est stable pour la composition d'applications.

Le résultat suivant caractérise les isométries vectorielles, et relie cette notion à celle de matrice orthogonale.

Proposition 15.12.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i. f est une isométrie ;
ii. f conserve le produit scalaire ;
iii. f transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée ;
iv. f transforme au moins une base orthonormée de E en une base orthonormée;
v. la matrice de f dans au moins une base orthonormée est orthogonale;
vi. la matrice de f dans toute base orthonormée est orthogonale.

Remarque 15.8.

Ces derniers résultats justifient l'existence d'une autre terminologie ; on appelle aussi les isométries vectorielles des **automorphismes orthogonaux.**

Méthode 15.4.

En pratique, pour montrer qu'une application linéaire est une isométrie, on calcule sa matrice M dans une base orthonormée et on montre que M est orthogonale, en vérifiant que ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormée.

Proposition 15.13. **Déterminant d'une isométrie**

Si $f \in \mathcal{O}(E)$ alors $\det(f) = \pm 1$.

Remarque 15.9.

Attention ! La réciproque du résultat ci-dessus est fausse (il suffit par exemple de considérer une symétrie non orthogonale).

Définition 15.7. **Groupe spécial orthogonal**

On introduit et on note $\mathcal{SO}(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) : \det(f) = 1\}$. Cet ensemble est appelé le **groupe spécial orthogonal**, il est aussi parfois noté $\mathcal{O}^+(E)$.
Les isométries de $\mathcal{SO}(E)$ sont dites **directes** (ou positives), celles de déterminant -1 sont dites **indirectes** (ou négatives).

Théorème 15.14.

i. Une isométrie est directe si et seulement si elle transforme les bases orthonormées directes en bases orthonormées directes (on dit que f **conserve l'orientation**).
ii. La composée de deux isométries directes (*resp.* indirectes) est une isométrie directe.
iii. Si f est une isométrie, alors f et f^{-1} ont même sens.

Exemple 15.4.

On voit aisément sur un dessin que, dans le plan, les rotations sont des isométries directes et les symétries orthogonales sont des isométries indirectes.

Théorème 15.15. **Éléments propres d'une isométrie**

Soit f une isométrie de E.

i. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$.
ii. Si -1 et 1 sont des valeurs propres de f, alors E_1 et E_{-1} sont orthogonaux.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f)$. Alors il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, mais alors $\|x\| = \|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ donc $|\lambda| = 1$. On a bien $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$.
Si 1 et -1 sont toutes deux valeurs propres de f, considérons deux vecteurs propres x et y respectivement associés à 1 et -1. Alors, $(x|\,y) = (f(x)|\,f(y)) = (x|-y) = -(x|y)$ et donc $(x|\,y) = 0$ et les deux sous-espaces propres sont bien orthogonaux. □

Théorème 15.16.
Soit f une isométrie, et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors $F^\perp$ est également stable par f.

Preuve. Supposons F stable par $f \in \mathcal{O}(E)$. Observons que $f(F) = F$ par inclusion évidente et égalité des dimensions. Soit $y \in F^\perp$. Pour tout $z \in F$, il existe $x \in F$ tel que $z = f(x)$ et donc, $(f(y)|\, z) = (f(y)|\, f(x)) = (y|\, x) = 0$.
Ainsi, $f(y) \in F^\perp$. □

Corollaire 15.17.
Soit f une isométrie de E.
Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, alors ${E_\lambda}^\perp$ est stable par f, et l'endomorphisme induit par f sur ${E_\lambda}^\perp$ est encore une isométrie.

4 Isométries en dimension 2

Dans cette section, on suppose que $n = 2$, notamment E et $\mathbb{R}^2$ sont alors isomorphes.
Sauf mention explicite du contraire, on considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

On cherche alors à **identifier** et **interpréter géométriquement** les éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$.

Pour ce faire, commençons par observer les choses suivantes.
Soient $f \in \mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Tout d'abord

$$\begin{aligned} M^\top M = I_2 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = I_2 \\ &\iff \quad \begin{cases} a^2+c^2 &= 1 \\ b^2+d^2 &= 1 \\ ab+cd &= 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or,

$$a^2 + c^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} : \quad \begin{cases} a = \cos\theta \\ c = \sin\theta \end{cases}$$

et

$$b^2 + d^2 = 1 \iff \exists \varphi \in \mathbb{R} : \quad \begin{cases} b = \cos\varphi \\ d = \sin\varphi \end{cases} .$$

Il suit qu'on peut d'ores et déjà écrire $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\varphi \\ \sin\theta & \sin\varphi \end{pmatrix}$.
De plus, les formules usuelles de trigonométrie donnent $ab + cd = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = \cos(\theta - \varphi)$.
Donc $ab + cd = 0 \iff \theta - \varphi = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \iff \varphi = \theta + \varepsilon\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad$ avec $\quad \varepsilon = \pm 1$.

$$\cos\varphi = \cos\left(\theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) = -\varepsilon\sin\theta; \quad \sin\varphi = \sin\left(\theta + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon\cos\theta$$

D'où

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \det(M) \in \{-1, 1\}.$$

Théorème 15.18. **Isométries du plan**

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Plus précisément,

i. $M \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \iff \det(M) = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Auquel cas, $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos(\theta) + 1$ et :

✗ Si $\theta \neq 0[\pi]$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.
✗ Si $\theta = 0[\pi]$, on on a $M = \pm I_2$.

ii. $\det(M) = -1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Auquel cas, $M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée directe avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \{-1, 1\}$. Il existe donc $P \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^\top.$$

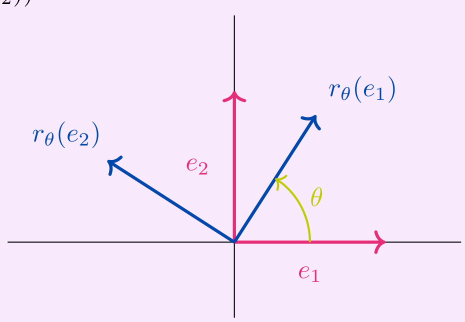
Définition 15.8. **Rotation d'angle θ**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **rotation de E d'angle θ**, l'endomorphisme de E, noté r_θ, dont la matrice dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ est

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarque 15.10. **Angle orienté**

Si $v = r_\theta(u)$, on dit que la mesure de l'angle orienté (u, v) est θ (modulo 2π).
Notamment $\theta = (e_1, r_\theta(e_1)) = (e_2, r_\theta(e_2))$.



Proposition 15.19. **Propriétés des rotations du plan**

Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

i. $r_\theta = r_{\theta'} \iff \theta = \theta'[2\pi]$
ii. $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta'} \circ r_\theta = r_{\theta+\theta'}$;
iii. r_θ est bijective, de bijection réciproque $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.

Remarque 15.11.

La matrice d'un changement de B.O.N directe étant celle d'une rotation d'angle θ', un changement de B.O.N. directe ne change pas la matrice d'une rotation :

$$P^\top M P = R_{-\theta'} R_\theta R_{\theta'} = R_{-\theta'+\theta+\theta'} = M.$$

Définition 15.9. **Réflexion du plan**

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée directe du plan. Soit $\mathcal{D}$ une droite (vectorielle) de $\mathbb{R}^2$ (c'est à dire un hyperplan de $\mathbb{R}^2$).
On rappelle **réflexion par rapport à** $\mathcal{D}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$, que l'on note $S_{\mathcal{D}}$.

Plus précisément, si $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $D = \mathrm{Vect}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2\right)$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_{\mathcal{D}}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

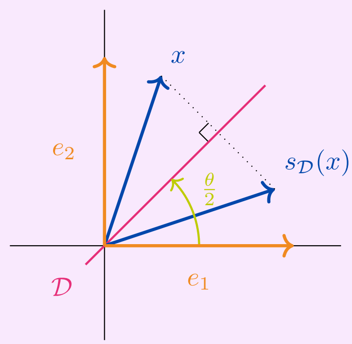
C'est une isométrie indirecte.

Remarque 15.12.

Soit $s_{\mathcal{D}}$ la réflexion dont la matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ dans la b.o.n directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

En notant $u = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) e_2$ et en formant une base $\mathcal{B}' = (u, v)$ orthonormée directe, la matrice de la réflexion d'axe $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(s_{\mathcal{D}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Attention ! Contrairement au cas des rotations, la matrice d'une réflexion dépend de la b.o.n directe dans laquelle on la calcule.

Théorème 15.20. **Classification des isométrie du plan**

On peut établir le tableau de synthèse suivant.

Nature de l'isométrie	Déterminant	Spectre réel	s.e. propres	Matrice dans une b.o.n directe
Id_E	1	$\{1\}$	$E_1 = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$-\mathrm{Id}_E$	1	$\{-1\}$	$E_{-1} = \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
r_θ : Rotation d'angle θ ($\theta \neq 0, \theta \neq \pi$)	1	$\emptyset$	/	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$s_{\mathcal{D}}$: Réflexion d'axe $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u)$	-1	$\{-1, 1\}$	$E_1 = \mathrm{Vect}(u)$, $E_{-1} = E_1^{\perp}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Proposition 15.21. **Composée de deux isométries d'un plan euclidien**

On a les résultats suivants.

i. la composée de deux rotations d'un plan euclidien est une rotation;
ii. la composée de deux réflexions d'un plan euclidien est une rotation;
iii. la composée d'une rotation et d'une réflexion d'un plan euclidien est une réflexion.

Exercice 15.3.

Montrer que la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion.

Méthode 15.5. **Nature d'une isométrie du plan**

Pour déterminer la nature et les caractéristiques d'une isométrie f, on commence par calculer la dimension de $E_1(f) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$:

- ✗ Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = 2$, alors $f = \operatorname{Id}_E$.
- ✗ Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = 1$, alors f est la réflexion par rapport à $\mathcal{D} = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$.
- ✗ Si $\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E) = 0$, alors f est une rotation. Pour déterminer l'angle de cette rotation, il suffit de lire celui-ci sur la matrice de f dans une base orthonormée (ou d'utiliser la relation $\operatorname{Tr}(f) = 2\cos\theta$).

Exercice 15.4.

Dans chaque cas, identifier $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ canoniquement associé à M :

$$i. \quad M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad ii. \quad M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

5 Isométries en dimension 3

Dans cette section, on suppose que $n = 3$, notamment E et $\mathbb{R}^3$ sont alors isomorphes.
Sauf mention explicite du contraire, on considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

On cherche alors à **identifier** et **interpréter géométriquement** les éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$.

On procède de la même manière que dans la section précédente.
Soient $f \in \mathcal{O}\left(\mathbb{R}^3\right)$. Comme le polynôme caractéristique de f est degré 3, il admet au moins une racine réelle qui vaut 1 ou -1 (d'après le **Théorème 15.15**).
Le sous-espace propre associe $E_{\pm 1}$ est stable par f, ainsi que sont orthogonal, et l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur $E_{\pm 1}^{\perp}$ est encore une isométrie vectorielle, classifiée dans la section précédente (d'après le **Théorème 15.17**).
Il existe donc, par concaténation de bases orthonormées de $E_{\pm 1}$ et $E_{\pm 1}^{\perp}$, une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{ou } M = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Définition 15.10. **Rotation d'axe orienté et d'angle θ**

Soit $u \neq 0$, ainsi que deux vecteurs v, w non colinéaires et orthogonaux à u, et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(u)$ et $\mathcal{P} = \mathcal{D}^{\perp} = \operatorname{Vect}(v, w)$. On appelle **rotation d'axe D orienté par u et d'angle θ** l'unique application linéaire r définie par:

- ✗ $r_{|\mathcal{D}} = \operatorname{Id}_{\mathcal{D}}$;
- ✗ $r_{|\mathcal{P}}$ est la rotation d'angle θ dans le plan $\mathcal{P}$ orienté par u.

Proposition 15.22.

Toute rotation E_3 est une isométrie directe.

Soit u un vecteur unitaire, $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(u)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base orthonormée directe. Alors la matrice de la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par u et d'angle θ dans la base $\mathcal{B}$ est :

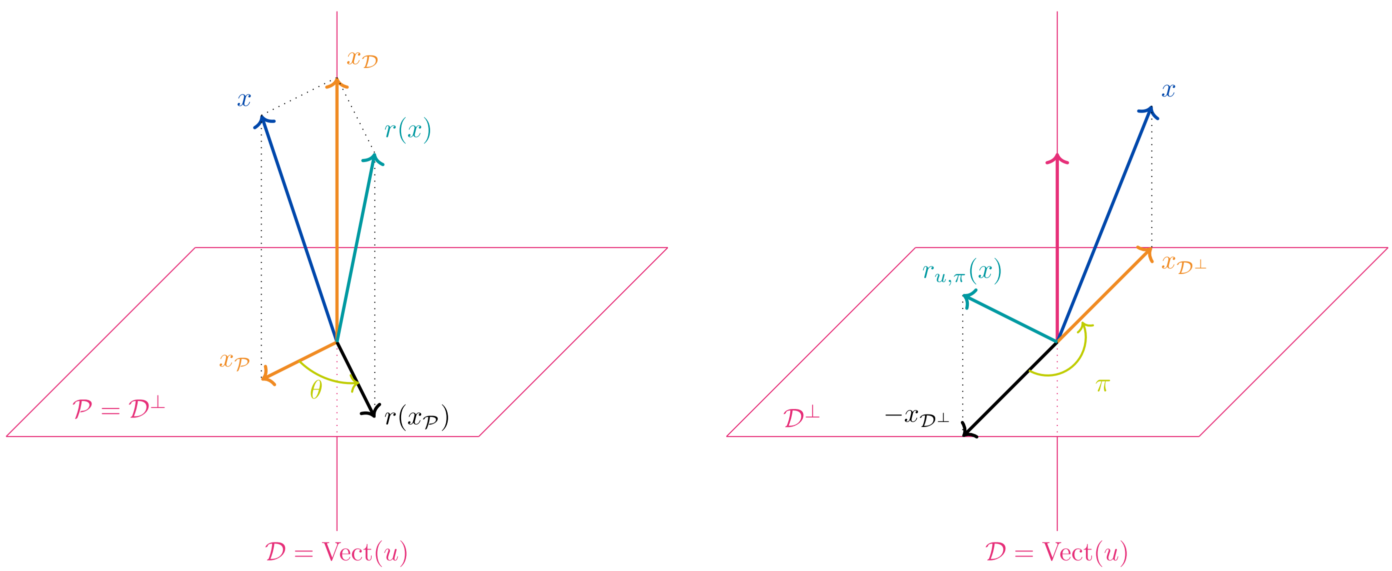
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Remarque 15.13.

- ✗ La rotation d'axe D orienté par u et d'angle θ est souvent notée $r_{u,\theta}$.
- ✗ Si on change u en $-u$, alors l'orientation de $\mathcal{P}$ change; ainsi on a, $r_{u,-\theta} = r_{-u,\theta}$.
- ✗ Contrairement au cas du plan euclidien, la matrice d'une rotation dépend désormais de la base dans laquelle on se place. La base $\mathcal{B}$ utilisée ci-dessus est dite *adaptée* à la rotation, en ce sens qu'elle lui confère une matrice diagonale par blocs.
- ✗ En prenant $\theta = \pi$ on obtient la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{D}$, aussi appelée **demi-tour** ou **retournement**.

Illustration 15.1. **Rotation et retournement**

Les figures ci-dessous représentent respectivement une rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par u et d'angle θ et un retournement d'axe $\mathcal{D}$ orienté par u.



Méthode 15.6. **Identifier une isométrie directe de l'espace**

Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans une b.o.n directe $\mathcal{B}$ est M.

- ✗ On vérifie que $M^{\top}M = I_3$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.
  f est bien une isométrie vectorielle.
- ✗ On vérifie que $\det(f) = 1$; f est une isométrie positive, c'est donc une rotation d'axe dirigée par u et d'angle θ.
- ✗ On détermine l'axe $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(u)$ de la rotation en résolvant $MX = X$.
- ✗ L'angle de la rotation vérifie
$$\mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos(\theta)$$
  donc
$$\theta = \pm \arccos\left(\frac{\mathrm{Tr}(M) - 1}{2}\right).$$
  On trouve le signe de θ en observant que :
$$\sin(\theta) = \det_{\mathcal{B}}(u, x, f(x)),$$
  où on choisit $x \in \mathcal{D}^{\perp}$ unitaire quelconque.
  En effet, notant $y = u \wedge x$, (x, y) est une b.o.n directe de $D^{\perp}$ et (u, x, y) est une b.o.n directe de $\mathbb{R}^3$, donc on obtient
$$\det_{\mathcal{B}}(u, x, f(x)) = [u, x, f(x)] = (u \wedge x \mid f(x)) = (y \mid \cos\theta x + \sin\theta y) = \|y\|^2 \sin\theta = \sin\theta.$$

Exemple 15.5.
Déterminons les caractéristiques géométriques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

- ✗ $M^\top M = I_3$ et $\det(M) = 1$. C'est donc une rotation.
- ✗ $MX = X \iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On pose alors $u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'axe de la rotation est $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(u)$.
- ✗ $\operatorname{Tr}(M) = 2$ donc $\cos\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ et on montre que $\sin\theta \geqslant 0$. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

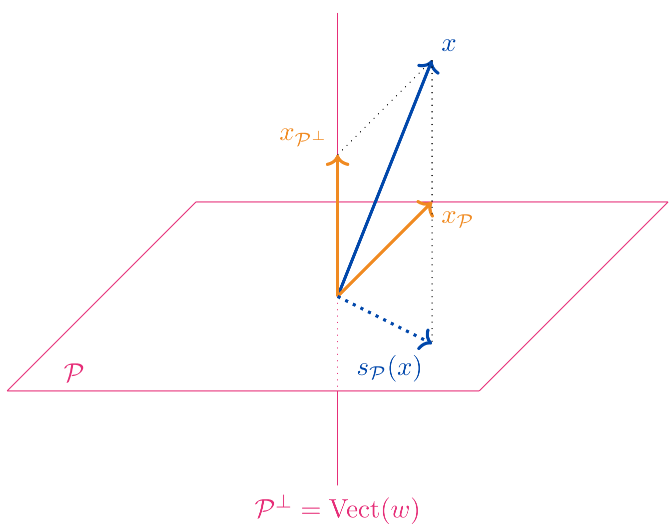
Exercice 15.5.

Reconnaitre l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On précisera ses éléments caractéristiques.

Définition 15.11. **Réflexion**
On appelle **réflexion** de $\mathbb{R}^3$ toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire un plan). Si $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel, on notera $s_{\mathcal{P}}$ la réflexion par rapport à $\mathcal{P}$.

Illustration 15.2. **Réflexion**
La figure ci-dessous représente la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$.



Proposition 15.23.
Soit $\mathcal{P}$ un plan vectoriel. Alors :

i. Si (u, v) est une base de $\mathcal{P}$, et $w \neq 0$ est orthogonal à $\mathcal{P}$, alors

$$\operatorname{Mat}_{(u,v,w)}(s_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii. $s_{\mathcal{P}}$ est une isométrie indirecte.
iii. La matrice d'une réflexion dans une base orthonormée est symétrique.

Remarque 15.14.
La base (u, v, w) utilisée ci-dessus est dite *adaptée* à la réflexion: c'est une base formée de vecteurs propres de $s_{\mathcal{P}}$. En raisonnant de même on prouve que toute symétrie est diagonalisable.

Proposition 15.24. **Composée d'une symétrie par une rotation**

Soit u un vecteur unitaire, $\mathcal{D} = \text{Vect}(u)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base orthonormée directe.
Soit r la rotation d'axe $\mathcal{D}$ orienté par u et d'angle θ, et s la réflexion par rapport à $\mathcal{D}^\perp = \text{Vect}(v, w)$.

i. $r \circ s$ est une isométrie indirecte;

ii. la matrice de $r \circ s$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$;

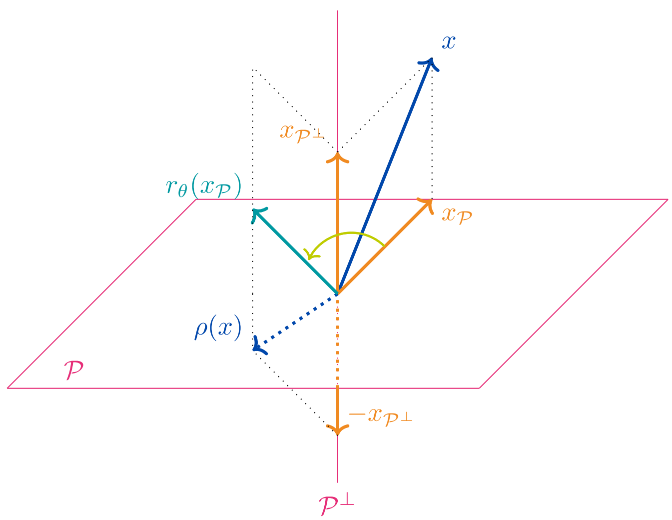
iii. r et s commutent.

Définition 15.12. **Rotation-Réflexion**

On appelle **rotation-réflexion** la composée commutative d'une réflexion s par rapport à un plan $\mathcal{P}$ et d'une rotation r d'axe $\mathcal{D} = \mathcal{P}^\perp$.

Illustration 15.3. **Rotation-Réflexion**

La figure ci-dessous représente la rotation-réflexion ρ composé de la réflexion s par rapport au plan $\mathcal{P}$ et de la rotation r_θ d'axe $\mathcal{D} = \mathcal{P}^\perp$ et d'angle θ.



Théorème 15.25. **Isométrie de $\mathbb{R}^3$**

Toute isométrie de $\mathbb{R}^3$ est soit :

i. une rotation;

ii. une réflexion;

iii. une rotation-réflexion.

Remarque 15.15.

- ✗ Il y a deux types de symétries parmi les isométries de $\mathbb{R}^3$: les réflexions (=symétrie par rapport à un plan) et les demi-tours (=symétrie par rapport à une droite=rotation d'angle π).
- ✗ Les seules matrices orthogonales de taille 3 à être symétriques sont les matrices de symétrie.

Corollaire 15.26.

Soit $f \in \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$. Alors f est une rotation.

Théorème 15.27. **Classification des isométries de $\mathbb{R}^3$**

On peut établir le tableau de synthèse suivant.

Nature de l'isométrie	Déterminant	Spectre	Matrice dans une certaine b.o.n.
Id_E	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Demi-tour	1	$\{1, -1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotation d'angle $\theta (\neq 0, \pi)$	1	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$-\mathrm{Id}_E$	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Réflexion	-1	$\{1, -1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Rotation-réflexion	-1	$\{-1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Méthode 15.7.

Pour déterminer la nature et les caractéristiques d'une isométrie f de E_3, on commence par caculer $\dim E_1(f) = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$:

- ✗ si $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 3$, alors $f = \mathrm{Id}$;
- ✗ si $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 2$, alors f est la réflexion par rapport à $\mathcal{P} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$;
- ✗ si $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 1$, alors f est une rotation d'axe $\mathcal{D} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$;
- ✗ si $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 0$, alors f la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation.

Exercice 15.6.

Reconnaitre l' endomorphisme dont la matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

On précisera ses éléments caractéristiques.

Méthode 15.8.

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ admettant M pour matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$. Si $\det M = -1$, alors f est soit une réflexion (ce sera le cas si et seulement si la matrice est symétrique), soit la composée commutative d'une réflexion et d'une rotation d'axe orthogonal, et pour déterminer les éléments caractéristiques de f dans le second cas on procède comme suit:

- ✗ l'axe $\mathcal{D}$ de la rotation est $E_{-1}(M)$, soit l'ensemble des solutions de l'équation $MX = -X$;
- ✗ le plan de la réflexion est $\mathcal{P} = \mathcal{D}^\perp$;
- ✗ l'angle θ de f est donné (au signe près) par $\mathrm{Tr}(M) = -1 + 2\cos\theta$ (si $\theta \equiv 0[2\pi]$ la rotation est triviale, et donc f est une réflexion);
- ✗ θ est du signe de $\det_{\mathcal{B}}(u, x, f(x))$ pour n'importe quel vecteur x unitaire et orthogonal à u, u étant le vecteur choisi pour diriger et orienter l'axe de la rotation.

6 Sélection d'exercices

Exercice 15.7.

Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des endomorphismes dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M, dans chacun des cas ci-dessous :

i. $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$,

ii. $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$,

iii. $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -3 & -1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & -2 \end{pmatrix}$,

iv. $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$,

v. $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 15.8.

Soit E un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Déterminer les matrices dans la base $\mathcal{B}$ des endomorphismes suivants :

i. le demi-tour (*i.e.* la rotation d'angle π) d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (1, 2, 2)$;
ii. la réflexion de plan $\mathcal{P} : x - y + z = 0$;
iii. la rotation d'axe dirigé et orienté par $u = (1, 1, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$;
iv. la réflexion-rotation d'axe dirigé et orienté par $u = (1, 1, 1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$;
v. la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équations $x = y = z$;
vi. la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 15.9.

Soit $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Déterminer a, b, c pour que A soit une rotation.

Exercice 15.10.

Diagonaliser dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel) la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Interpréter l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé comme une combinaison linéaire de deux projections à préciser.

Exercice 15.11.

On se place dans l'espace affine euclidien usuel. Déterminer une équation cartésienne du plan P', symétrique du plan P d'équation $x - y + 2z - 3 = 0$ par rapport à la droite D d'équations $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = -z + 1 \end{cases}$.

Exercice 15.12.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit a un vecteur non nul et φ l'application définie sur E par $\varphi : u \mapsto a \wedge (a \wedge u)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme diagonalisable de E et déterminer ses éléments propres.
2. Caractériser géométriquement φ lorsque a est unitaire.

Exercice 15.13.

Soit E un espace euclidien et f une isométrie de E. Montrer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = (\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}))^{\perp}$.

Exercice 15.14.

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul. Montrer que f est une rotation si et seulement si,

$$\forall (u,v) \in E^2, \qquad f(u) \wedge f(v) = f(u \wedge v).$$

Exercice 15.15.

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. On pose $A = I_n - 2U{}^tU$.

1. Calculer $A^\top$ et A^2.
2. Caractériser géométriquement A.

Exercice 15.16.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top M = I_n$.

1. Montrer que M est inversible
2. Montrer que M est symétrique.
3. En déduire M.

Exercice 15.17.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ telles que:

$$\forall X \neq 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \, X^\top \cdot M \cdot X > 0$$

où $X^\top$ désigne la transposée de X.

1. Montrer que si $M \in \mathcal{E}$ alors toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.
2. Réciproquement, montrer que toute matrice symétrique dont les valeurs propres sont toutes strictement positives est un élément de $\mathcal{E}$.
3. Soit $A \in \mathcal{E}$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathcal{E}$.
4. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{E}$. Montrer que $A + B$ est inversible.

Exercice 15.18.

Soit v un vecteur non nul d'un espace euclidien E et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note f l'application définie par $f(u) = u + \lambda(u|v)v$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une isométrie vectorielle.
2. Dans ce cas, déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f. Interpréter géométriquement f.

Exercice 15.19.

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \longmapsto \omega \wedge u \end{array}$, où $\omega \in \mathbb{R}^3$ est fixé.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, et déterminer son noyau et son image en fonction de ω.
2. Montrer l'existence d'une matrice P orthogonale et d'un réel a telle que la matrice A de f dans la base canonique soit de la forme
$$A = P \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
3. En déduire que f est la composée de trois endomorphismes simples, que l'on précisera.

Exercice 15.20.

Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre n, telle qu'il existe un entier $k > 0$ vérifiant $M^k = I_n$. Montrer alors que M est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Exercice 15.21.

Soient $a, b, c > 0$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & c \\ a & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M + I_3$ est inversible.
2. Soit $K = (M - I_3)(M + I_3)^{-1}$. Montrer que K est une matrice orthogonale.