16 Intégrales à paramètre

Dans le **Chapitre 14**, lors du petit aperçu sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, on a pu rencontrer la situation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = g(x,y) \Longrightarrow f(x,y) = \int g(x,y)\mathrm{d}x + \varphi(y),$$

où f et g étaient deux fonctions de deux variables (à valeurs réelles) définies et $\mathcal{C}^1$ sur un domaine du type $I \times J$, et φ une fonction quelconque, de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur J.
Apparaît alors un exemple d'intégrale dont l'*intégrande* ne dépend pas que de la variable d'intégration. Il est possible qu'on ne sache pas explicitement calculer cette intégrale.
On donne dans ce chapitre quelques éléments d'étude de ces fonctions.

Dans tout le chapitre, les lettres I et J désignent des intervalles quelconques de $\mathbb{R}$ (non nécessairement bornés), de sorte que I soit non trivial (non vide et non réduit à un point) et J non vide.
Notre objectif est, pour g une fonction définie sur $I \times J$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'étudier la régularité de la fonction f définie par une intégrale dite à paramètre :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \int_J g(x,t)\mathrm{d}t.$$

1 Définitions, rappels

On *rappelle* ce premier résultat, déjà présenté sous une autre forme dans le **Chapitre 5** d'intégration et qui découle du Théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 16.1.
On considère deux fonctions u, v dérivables sur I et à valeurs dans J, ainsi qu'une fonction h continue sur J et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I, \ f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} h(t)\mathrm{d}t$$

est dérivable sur I, de sorte que

$$\forall x \in I, \ f'(x) = v'(x) \times h\Big(v(x)\Big) - u'(x) \times h\Big(u(x)\Big).$$

Dans ce chapitre on s'intéresse à des fonctions définies par une intégrale où la variable se trouve dans l'*intégrande* (et non dans les bornes comme ci-dessus).

Définition 16.1. **Intégrale à paramètre**
On appelle **intégrale à paramètre** toute fonction définie par une relation de la forme

$$\forall x \in I, \ f(x) = \int_J g(x,t)\mathrm{d}t,$$

où $g : I \times J \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables.

Exemple 16.1. **Transformée de Laplace**

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, sa *transformée de Laplace* est définie par $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\mathrm{d}t$ (sous réserve d'existence), c'est donc une intégrale à paramètre.

Méthode 16.1.

L'étude d'une intégrale à paramètre commence toujours par l'étude de son domaine de définition:

- ✗ si J est bornée on vérifiera que, pour tout $x \in I$, la fonction d'une variable $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur J (on aura alors affaire à une intégrale ordinaire);
- ✗ sinon, l'intégrale est impropre, et on devra alors prouver sa convergence par les méthodes usuelles (par exemple en utilisant le théorème de comparaison).

Exercice 16.1.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 16.2.

Étudier le domaine de définition de $f : \ x \mapsto= \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}}{t+x}\mathrm{d}t$, où $x \in \mathbb{R}_+$.

Pour étudier la continuité ou la dérivabilité des intégrales à paramètre, nous aurons besoin de l'hypothèse suivante.

Définition 16.2. **Hypothèse de domination**

Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On dit que g vérifie l'**hypothèse de domination** sur $I \times J$ si et seulement si il existe une fonction $\varphi : \ J \to \mathbb{R}$ (de la seule variable d'intégration et donc **indépendante de** l'autre), positive et intégrable sur J telle que:

$$\forall (x,t) \in I \times J, \ |g(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Exemple 16.2.

$g : (x,t) \mapsto \cos(xt)e^{-t^2}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. En effet,

- ✗ $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad , \left|\cos(xt)e^{-t^2}\right| \leq e^{-t^2}$;
- ✗ $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad e^{-t^2} \geq 0$;
- ✗ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente (autrement dit $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Cette hypothèse de domination assure alors que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$, en vertu du théorème de comparaison.

2 Continuité, dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Commençons par motiver ce qui va suivre par une observation.

L'application $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence, pour $x > 0$).

Pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pourtant, f **n'est pas continue** puisque un calcul direct montre que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1 \to 1$ lorsque $x \to 0, x > 0$.

Ainsi, la continuité, à $t \in J$ fixé, de $x \mapsto g(x,t)$ ne suffit pas à garantir la continuité de f. Ici,

$$\lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{x \to 0} x\mathrm{e}^{-xt}\right)\mathrm{d}t.$$

2.1 Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 16.2. **Continuité sous le signe $\int$**

Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que:

i. **Caractère $\mathcal{C}^0$ - étude « en x »**

- ✗ Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur I;

ii. **Intégrabilité (domination) - étude « en t »**

- ✗ Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur J;
- ✗ g vérifie l'hypothèse de domination sur $I \times J$.

Alors, $f : x \mapsto \int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ définit une fonction continue sur I.

Preuve. Résultat admis. □

Remarque 16.1.

- ✗ Si g est continue sur $I \times J$, alors elle l'est nécessairement par rapport à chacune de ses deux variables. **Mais la réciproque est fausse**.
  L'hypothèse ici faite sur les fonctions d'une variable est donc plus faible.
- ✗ L'intégrabilité de $t \mapsto g(x,t)$ sur J résulte de l'hypothèse de domination sur g, en vertu du théorème de comparaison, il n'est donc pas nécessaire de la prouver explicitement si on a vérifié l'hypothèse.
- ✗ Le programme officiel précise qu'aux concours, il n'est pas nécessaire de justifier l'hypothèse relative à la continuité « par rapport à t » mais on doit quand même citer que la propriété est satisfaite.

Remarque 16.2. **Machine à intervertir $\lim$ et $\int$**

Le théorème de continuité sous le signe $\int$ doit être interprété comme une *machine à intervertir* les symboles lim et $\int$. En effet, si les hypothèses sont satisfaites, pour $x_0 \in I$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \int_J g(x,t)\mathrm{d}t &= \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{car } f \text{ continue en } x_0 \\ &= \int_J g(x_0,t)\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x \to x_0} g(x,t)\mathrm{d}t \qquad \text{car, pour tout } t \in J,\ x \mapsto g(x,t) \text{ continue en } x_0\end{aligned}$$

Exercice 16.3.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Méthode 16.2. **Domination locale**

La continuité étant une notion locale, il suffit pour prouver la continuité de f sur I, de prouver que f est continue en chaque point de l'intervalle. Il suffit donc d'appliquer le théorème précédent au voisinage de chaque point, et ainsi il n'est pas nécessaire de vérifier l'hypothèse de domination sur I tout entier. Lorsque l'on raisonne de la sorte, on dit que l'on vérifie **l'hypothèse de domination locale**. On peut remplacer l'hypothèse de domination sur $I \times J$ par

- ✗ Pour tout $[\alpha, \beta] \subset I$, g vérifie l'hypothèse de domination sur $[\alpha, \beta] \times J$.

Exercice 16.4.

Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{2t}}{t+x}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16.5. **Fonction Gamma d'Euler**

1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.
3. Pour tout $x > 0$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
4. Que vaut, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)$?
5. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

Le résultat suivant n'est pas au programme, il faut donc **le redémontrer systématiquement pour l'utiliser.**
On rappelle qu'un segment désigne un intervalle **fermé et borné** de $\mathbb{R}$.

Corollaire 16.3. **Cas particulier sur un segment, HP**

Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que:

i. $(x,t) \mapsto g(x,t)$ est continue sur $I \times J$ (**en tant que fonction de deux variables**);
ii. $J = [a, b]$ est un segment.

Alors, $f : x \mapsto \int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ définit une fonction continue sur I.

Preuve. On vérifie qu'on est dans le cadre d'application du théorème en vérifiant les hypothèses :

i. **Caractère $\mathcal{C}^0$ - étude « en x »**

✗ g continue sur $I \times [a,b]$ donc, pour tout $t \in [a,b]$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue.

ii. **Intégrabilité - étude « en t »**

✗ g continue sur $I \times [a,b]$ donc, pour tout $x \in I$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue.
✗ L'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment $[c,d]$ inclus dans I. En effet, $[c,d] \times [a,b]$ étant un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$, la continuité de g justifie l'existence de $M_{c,d} \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall (x,t) \in [c,d] \times [a,b], \quad |f(x,t)| \leqslant M_{c,d} \rightsquigarrow \text{ indépendante de } x \text{ positive et intégrable sur } [a,b]$$

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$. □

Méthode 16.3.

Si l'intégrale n'est pas impropre, on peut donc se passer de l'hypothèse de domination pour prouver la continuité de f, sous réserve que g soit continue sur $I \times J$ (et plus seulement par rapport à chacune de ses deux variables x et t).
Mais il faut redémontrer qu'on peut le faire.

Exercice 16.6.

Utiliser le **Corollaire 16.3** pour prouver que $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{2t}}{t+x}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Théorème 16.4. **Dérivation sous le signe $\int$**

Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que:

i. **Caractère $\mathcal{C}^1$ - étude « en x »**

✗ Pour tout $t \in J$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I;

ii. **Intégrabilité (domination) - étude « en t »**

✗ Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur J;

✗ Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur J ;

✗ $\dfrac{\partial}{\partial x} g$ vérifie l'hypothèse de domination sur $I \times J$.

Alors $f :\ x \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ définit une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I, de sorte que

$$\forall x \in I,\ \ f'(x) = \int_J \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\mathrm{d}t.$$

Preuve. Résultat admis. □

Exercice 16.7.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire une expression explicite de f.

Méthode 16.4. **Domination locale**

La dérivabilité est une notion locale, tout comme la continuité. On peut donc utiliser ce théorème en vérifiant **l'hypothèse de domination locale** en tout point de I. C'est à dire qu'on vérifie l'hypothèse de domination pour $\dfrac{\partial}{\partial x} g$ sur tout domaine du type $[\alpha, \beta] \times J$, où $[\alpha, \beta] \subset I$.

Exercice 16.8. **Gamma, le retour**

On reprend les notations de l'**Exercice 16.5**.

Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer, pour $x > 0$, $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Comme précédemment, le résultat suivant n'est pas au programme, mais en exercice on peut le redémontrer (et on doit, le cas échéant, le faire) facilement pour l'utiliser.

Corollaire 16.5. **Cas particulier pour un segmet, HP**

Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que:

i. $(x,t) \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$;
ii. $J = [a,b]$ est un segment.

Alors, $f : x \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)\mathrm{d}t$ définit une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I, de sorte que

$$\forall x \in I,\ \ f'(x) = \int_J \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\mathrm{d}t.$$

Méthode 16.5.
Si l'intégrale n'est pas impropre, on peut donc se passer de l'hypothèse de domination pour prouver le caractère $\mathcal{C}^1$ de f, sous réserve que g soit $\mathcal{C}^1$ sur $I \times J$ et après avoir redémontré le corollaire ci-dessus.

Exercice 16.9. **Calcul de l'intégrale de Gauss**

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On a calculé la valeur de cette intégrale, à l'aide des intégrales de Wallis, dans le **Devoir Surveillé n°3**.

3 Sélection d'exercices

Exercice 16.10.
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes:

$$i.\ f_1 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t, \quad ii.\quad f_2 : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}, \quad iii.\quad f_3 : x \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x}.$$

Exercice 16.11.
Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}}{t+x}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16.12.

1. Déterminer trois fonctions a, b et c telles que

$$\forall (x,t) \in]-1,+\infty[\times\mathbb{R}_+, \qquad \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{a(x)t+b(x)}{1+t^2} + \frac{c(x)}{1+xt}.$$

2. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

3. En déduire :

$$\forall x > -1,\ F(x) = \frac{\ln 2}{2}\arctan(x) + \frac{\pi}{8}\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 16.13.
On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer f'.
2. En déduire une expression simple de f.

Exercice 16.14.
Soit $a > 0$ fixé. Pour tout $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$.

1. Justifier que I_{n+1} est dérivable et calculer sa dérivée.
2. En déduire I_2.

Exercice 16.15.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$, et on note $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, puis $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (*on pourra faire une hypothèse de domination locale*).

2. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et calculer $f(0)$.

3. Vérifier que f est solution de $(E) : y - y' = \dfrac{I}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Résoudre (E) et en déduire la valeur de I.

Exercice 16.16.

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t^2}$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et donner une expression de f'' sous forme d'une intégrale.

2. Calculer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles, et en déduire $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3}$.

Exercice 16.17.

Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/n} \frac{n\cos t}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16.18.

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{2x\cos t}\mathrm{d}t$, et $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et solution de $(E) : xy'' + y' - 4xy = 0$.

2. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière, et préciser leur rayon de convergence.

3. En déduire, après avoir montré la convergence de l'intégrale, que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto \varphi(x)\left(A + B\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,\varphi^2(t)}\right), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

4. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,\varphi^2(t)}$ est divergente.

5. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\pi \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

Exercice 16.19.

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (on pourra établir une hypothèse de domination locale). En déduire son sens de variation.

2. Montrer $\forall x > 0,\ f(x) \geqslant \dfrac{1}{e}\displaystyle\int_0^{1/x} \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t$. En déduire la limite de f en 0.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 16.20.

Pour $x \geqslant 0$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$, et préciser la valeur de $F(0)$.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $(x+2)\,F(x+2) = (x+1)\,F(x)$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et donner sa dérivée et son sens de variation.

4. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

Exercice 16.21.

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{tx}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f et déterminer une expression intégrale de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1, puis chercher une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3. En déduire le développement limité d'ordre 3 de f en 0, puis l'allure de la courbe de f en ce point.
4. Préciser le sens de variation de f sur D_f, les limites aux bornes et l'allure de la courbe.

Exercice 16.22. **Une preuve du Théorème 16.4**

Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que:

i. $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur J pour tout $x \in I$;
ii. $x \mapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur I pour tout $t \in J$;
iii. Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur J ;
iv. $\dfrac{\partial}{\partial x} g$ vérifie l'hypothèse de domination sur $I \times J$.

Soit x_0 un point intérieur de I. On note

$$\tau : (x,t) \in I \setminus \{x_0\} \times J \mapsto \frac{g(x,t) - g(x_0,t)}{x - x_0}.$$

On note alors $I_- = \{x \in I : x < x_0\}$ et $I_+ = \{x \in I, x > x_0\}$.

1. Justifier que τ vérifie les deux hypothèses de continuité « en x » et « en t » du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

2. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis (appliquée à t fixé), montrer que τ vérifie l'hypothèse de domination sur $I_+ \times J$.

3. Conclure que

$$\lim_{x \to x_0^+} \int_J g(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial}{\partial x} g(x,t)\mathrm{d}t.$$

4. En déduire le résultat du théorème.