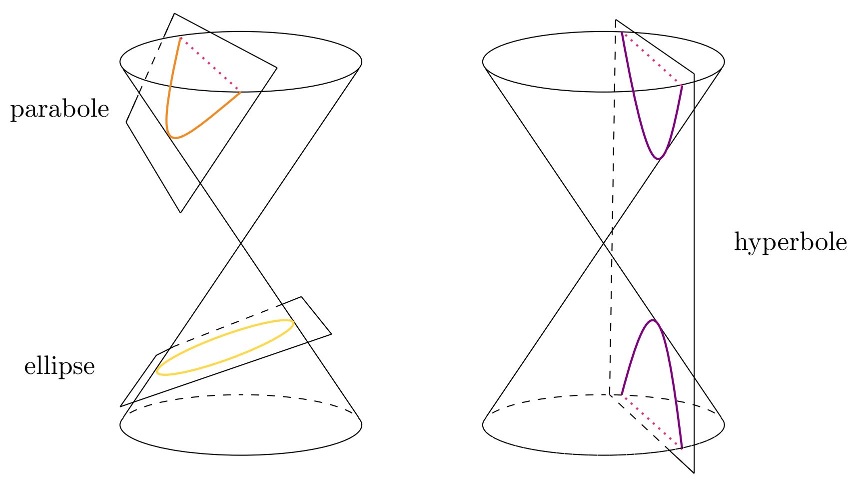
17 Coniques

Introduction

Les coniques sont des courbes planes étudiées depuis l'antiquité, possédant de nombreuses applications (par exemple en astronomie et en optique).
On peut définir de plusieurs façons les coniques. On peut par exemple montrer que ce sont les courbes du plan obtenues en réalisant l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan (excepté qu'on obtient ainsi quelques cas dégénérés qu'on ne rencontre pas avec la définition *monofocale*, qui est la définition que l'on choisit).

Illustration 17.1. **Les coniques comme section d'un cône de révolution par un plan**



On rappelle quelques définitions et résultats. On se place dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.

Définition 17.1. **Distance d'un point à une partie non vide**

Soit $\mathcal{U}$ une partie non vide du plan et A un point. On note $\mathrm{d}(A,\mathcal{U})$ la borne inférieure des distances entre A et un point de $\mathcal{U}$:

$$\mathrm{d}(A,\mathcal{U}) = \inf\{AM :\ M \in \mathcal{U}\}.$$

Il existe un unique point H de $(\mathcal{D})$ tel que $\mathrm{d}(A,(\mathcal{D})) = AH$; ce point H est appelé le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

Proposition 17.1. **Calcul d'une distance**

Soient $(\mathcal{D})$ une droite de vecteur directeur u, d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, n un vecteur normal à $(\mathcal{D})$ et $A(x_A, y_A)$ un point. Soit B un point de $(\mathcal{D})$. On a :

$$\mathrm{d}(A,(\mathcal{D})) = \frac{\left|\det\left(u, \overrightarrow{BA}\right)\right|}{\|u\|} = \frac{\left|\langle n, \overrightarrow{BA}\rangle\right|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x_A + \beta y_A + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

1 Définition des coniques par foyer, directrice et excentricité

Définition 17.2. **Coniques, foyer, directrice et excentricité**

Soit $e > 0$, F un point et $(\mathcal{D})$ une droite du plan tels que $F \notin (\mathcal{D})$.
L'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que

$$\mathrm{d}(M, F) = e \times \mathrm{d}(M, (\mathcal{D}))$$

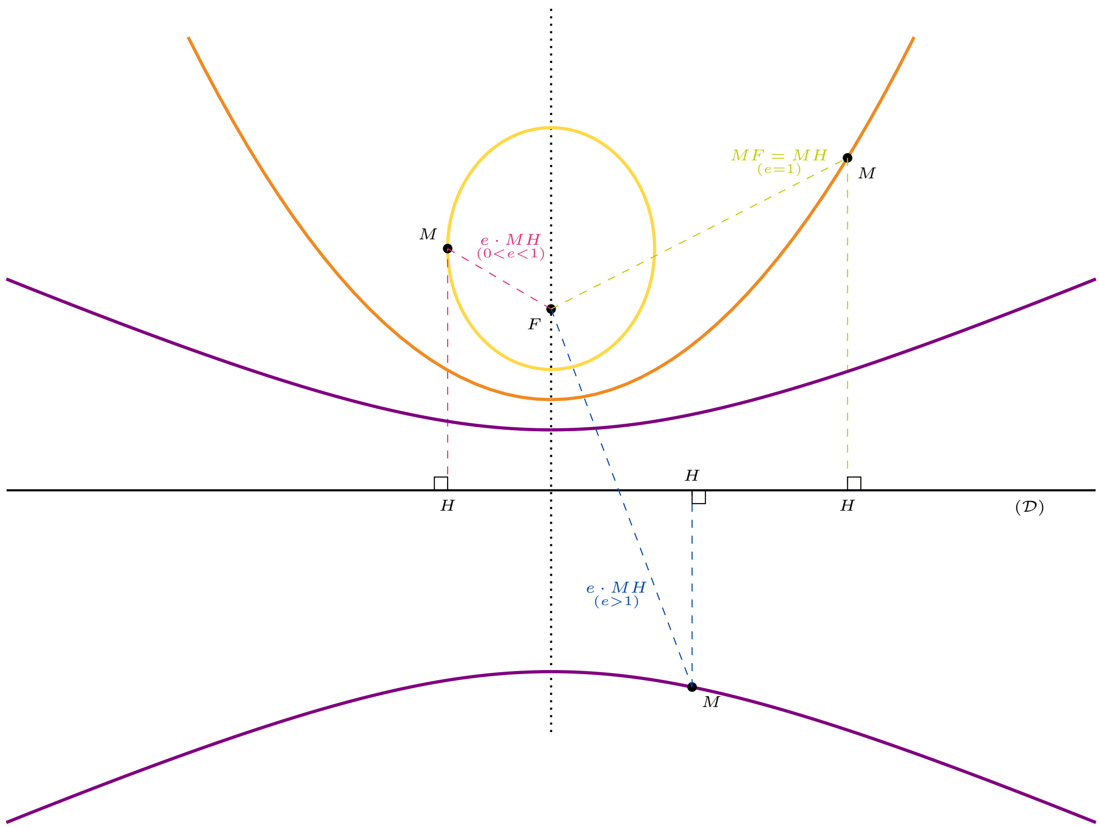
est appelé la **conique** de **foyer** F, de **directrice** $(\mathcal{D})$ et d'**excentricité** e.

Cette conique est appelée:

- ✗ une **parabole** si $e = 1$;
- ✗ une **ellipse** si $0 < e < 1$;
- ✗ une **hyperbole** si $e > 1$.

Illustration 17.2. **Trois coniques définies par un même foyer et une même droite directrice**

On représente sur la figure ci-dessous trois coniques : une ellipse ($e = 1/2$), une parabole et une hyperbole ($e = 2$), ayant le même foyer F et la même droite directrice $\mathcal{D}$.
H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.



Remarque 17.1.

- ✗ Si H est le projeté orthogonal de M sur $(\mathcal{D})$, on a $\mathrm{d}(M, F) = e \cdot \mathrm{d}(M, \mathcal{D}) \iff MF = eMH$.
- ✗ Les coniques sont clairement les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \dfrac{\mathrm{d}(M, F)}{\mathrm{d}(M, \mathcal{D})}$.

Exercice 17.1.

On se place dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.
Donner l'équation cartésienne de la parabole de directrice $(\mathcal{D}) : 2x + y = 1$ et de foyer $F(1, 1)$.

1.1 L'axe focal

Définition 17.3. **Axe focal**

Soit $(\mathcal{C})$ une conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'excentricité e.
La perpendiculaire à $(\mathcal{D})$ passant par F est appelée l'**axe focal** de la conique.

Théorème 17.2.

L'axe focal d'une conique en est un axe de symétrie.

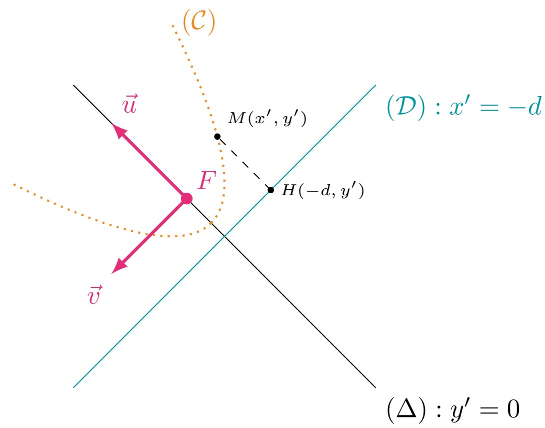
Preuve. Soit $(\mathcal{C})$ une conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$ et d'axe focal (Δ). Pour $M \in (\mathcal{C})$, note $M' = \mathcal{S}_{(\Delta)}(M)$ le symétrique de M par rapport à (Δ). Alors

$$\mathrm{d}(M', F) = \mathrm{d}(M, F) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(M', (\mathcal{D})) = \mathrm{d}(M, (\mathcal{D}))$$

donc $M' \in (\mathcal{C})$. □

On peut alors définir un repère orthonormé **direct** $\mathcal{R}_1 = (F, \vec{(u)}, \vec{(v)})$ centré en F avec $\vec{u}$ vecteur unitaire directeur de l'axe focal (Δ).
On note $d = \mathrm{d}(F, (\mathcal{D}))$.
Notant (x', y') les coordonnées d'un point dans $\mathcal{R}_1$:

- ✗ (Δ) a pour équation $y' = 0$;
- ✗ $(\mathcal{D})$ a pour équation $x' = -d$;
- ✗ Le projeté orthogonal de $M(x', y')$ sur $(\mathcal{D})$ a pour coordonnées $(-d, y')$.
- ✗ $\mathrm{d}(M, (\mathcal{D})) = \mathrm{d}(M, F) \iff x'^2 + y'^2 = e^2(x' + d)^2$.



Définition 17.4. **Sommets d'une conique**

On appelle **sommets** d'une conique ses points d'intersection avec son axe focal.

Théorème 17.3.

Soit $(\mathcal{C})$ une conique de foyer F, de directrice $(\mathcal{D})$, d'excentricité e et d'axe focal (Δ).
Soit K l'intersection de $(\mathcal{D})$ et de (Δ). On a les résultats suivants.

i. Les paraboles possèdent un unique sommet, qui est le milieu de $[FK]$.
ii. Les ellipses possèdent exactement deux sommets, situés de part et d'autre du foyer mais du même côté de la directrice.
iii. Les hyperboles possèdent exactement deux sommets, situés du même côté par rapport au foyer, mais de part et d'autre de la directrice.

Preuve. On se place dans le repère $\mathcal{R}_1$ introduit ci-avant. Un point $M(x', y')$ de la conique appartient à l'axe focal si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'^2 + y'^2 &=& e^2(x' + d)^2 \\ y' &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x'^2 &=& e^2(x' + d)^2 \\ y' &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} (1 - e^2)x'^2 - 2de^2x' - e^2d^2 &=& 0 \\ y' &=& 0 \end{array}\right.$$

- ✗ Pour $e = 1$ (une parabole), on a alors $-2de^2x' - e^2d^2 = 0$ si et seulement si $x' = -\frac{d}{2}$. Ainsi, une parabole possède un unique sommet de coordonnées $(-\frac{d}{2}, 0)$ dans $\mathcal{R}_1$: c'est bien le milieu de $[FK]$;
- ✗ Pour $e > 0$ avec $e \neq 1$ (ellipse ou hyperbole), on a

$$(1 - e^2)x'^2 - 2de^2x' - e^2d^2 = 0 \iff x' = \frac{-de}{1 + e} \quad \text{ou} \quad x' = \frac{de}{1 - e}.$$

On trouve bien les coordonnées de deux sommets S et S'. Plus précisément :

- ✓ Pour une ellipse, comme $0 < e < 1$, S et S' sont du même côté de $(\mathcal{D})$, et S est entre K et F;
- ✓ Pour une hyperbole, comme $e > 1$, S et S' sont des deux côtés de $(\mathcal{D})$, et S est entre K et F.

□

2 Réduction des équations algébriques des coniques

Dans cette section, nous allons donner l'**équation réduite** de chacune des coniques: il s'agit d'une équation cartésienne dans un repère bien choisi (de sorte que l'équation soit particulièrement simple). Cela permettra de tracer aisément la conique.

Dans chaque cas, on se place dans le repère réduit qui **n'est pas le même** que le repère $\mathcal{R}_1$ précédemment explicité.

2.1 Paraboles

Définition 17.5. **Repère réduit de la parabole**

Soit $(\mathcal{C})$ une parabole de directrice $(\mathcal{D})$ et de foyer F. Soient (Δ) son axe focal, et K l'intersection de $(\mathcal{D})$ et de (Δ). On appelle **repère réduit associé à la parabole** $(\mathcal{C})$, le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (S, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où :

- ✗ S est le sommet de la parabole ;
- ✗ $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{SF}}{\|\overrightarrow{SF}\|}$.

On pose encore $p = KF = \mathrm{d}(F, (\mathcal{D}))$, qui est appelé le **paramètre de la parabole**.

Théorème 17.4. **Équation réduite d'une parabole**

Dans son repère réduit $\mathcal{R}_0$, une parabole $(\mathcal{C})$ admet pour équation

$$y^2 = 2px.$$

Cette équation est appelée l'**équation réduite** de la parabole.

Théorème 17.5. **Paramétrage**

Un paramétrage d'une parabole dans son repère réduit est $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Illustration 17.3. **Équation réduite d'une parabole**

On représente la parabole $(\mathcal{C})$ dans son repère associé $\mathcal{R}_0 = (S, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Dans ce repère, $(\mathcal{C})$ admet pour équation (réduite)

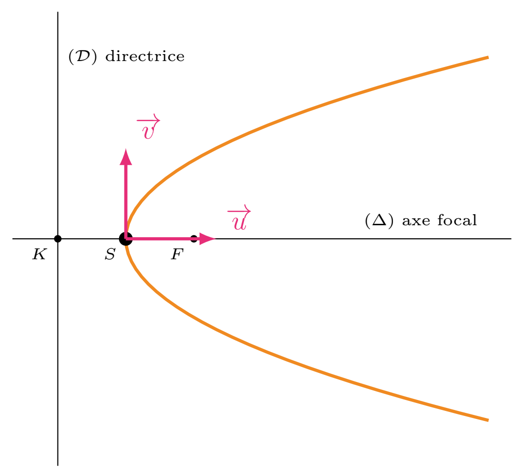
$$y^2 = 2px.$$

- ✗ Le sommet S de $(\mathcal{C})$ est l'origine du repère $\mathcal{R}_0$.
- ✗ Le foyer F de $(\mathcal{C})$ a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.
- ✗ La directrice a pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{D}) : x = -\frac{p}{2}.$$

- ✗ Une paramétrisation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2p} \\ t \end{pmatrix}.$$



Remarque 17.2.

Si l'on interverti $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le repère, on obtient l'équation $x^2 = 2py$.

Remarque 17.3.

Un autre paramétrage possible est $\begin{cases} x(t) = 2pt^2 \\ y(t) = 2pt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Dans son repère réduit, une parabole $(\mathcal{C})$ est la réunion des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sqrt{2px}$ et $x \mapsto -\sqrt{2px}$, ce qui permet d'en déduire le tracé directement (on pourrait également étudier la représentation paramétrique).

Exercice 17.2.

Déterminer une équation réduite de la parabole de foyer F dont les coordonnées sont $F(1,1)$ dans $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et de directrice $(\mathcal{D})$ d'équation cartésienne $(\mathcal{D}) : x - y = 1$ dans $\mathcal{R}$.
Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du sommet de la parabole.

2.2 Ellipses

D'après la discussion qui précède (et qui fait suite à la définition d'axe focal), on peut réécrire l'équation de la conique dans $\mathcal{R}_1 = (F, \vec{u}, \vec{v})$. Observant que $0 < e < 1$:

$$\begin{aligned}
x'^2 + y'^2 = e^2\left(x' + d\right)^2 \iff x'^2\left(1 - e^2\right) - 2dx'e^2 + y'^2 = e^2d^2 &\iff \left(1 - e^2\right)\left[x'^2 - \frac{2de^2}{1 - e^2}x'\right] + y'^2 = e^2d^2 \\
&\iff \left(1 - e^2\right)\left[\left(x' - \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{d^2e^4}{\left(1 - e^2\right)^2}\right] + y'^2 = e^2d^2 \\
&\iff \left(1 - e^2\right)\left(x' - \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + y'^2 = \frac{e^2d^2\left(1 - e^2\right) + d^2e^4}{1 - e^2} \\
&\iff \left(1 - e^2\right)\left(x' - \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + y'^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2} \\
&\iff \frac{\left(x' - \frac{de^2}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1.
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{cases} \tilde{x} &= x' - \dfrac{de^2}{1 - e^2} \\ \tilde{y} &= y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a &= \dfrac{ed}{1 - e^2} \\ b &= \dfrac{ed}{\sqrt{1 - e^2}} \end{cases},$$

et Ω le point de coordonnées $\left(\dfrac{de^2}{1 - e^2}, 0\right)$ dans $\mathcal{R}_1$, on peut définir un nouveau repère $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel l'ellipse a pour équation

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1.$$

On observe qu'il découle des calculs précédents que Ω est le milieu de $[SS']$ où S et S' sont les deux sommets de l'ellipse obtenus précédemment.

Définition 17.6. **Repère réduit de l'ellipse**

Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse de directrice $(\mathcal{D})$, de foyer F et d'excentricité $e \in]0,1[$. Soient (Δ) son axe focal, et K l'intersection de $(\mathcal{D})$ et de (Δ).
Soient S, S' ses sommets (avec $S \in [KF]$) et Ω le milieu de $[SS']$. On appelle **repère réduit associé à l'ellipse** $(\mathcal{E})$, le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où : $\vec{u}$ est défini par

$$\vec{u} = \frac{-\overrightarrow{\Omega F}}{\|\overrightarrow{\Omega F}\|}.$$

Le point Ω est appelé **centre** de l'ellipse.

Théorème 17.6. **Équation réduite d'une ellipse**

Dans son repère réduit $\mathcal{R}_0$, une ellipse $\mathcal{E}$ admet pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

avec $a=\Omega S=\Omega S'$. Notant $c=\Omega F=ea$, on a b qui vérifie $b>0$ et $a^2=b^2+c^2$.
Le nombre a est appelé le **demi-grand axe** et le nombre b le **demi-petit axe**.

De plus les quatre points S, S', T et T' de coordonnées respectives (dans $\mathcal{R}_0$) $(0,-a),(0,a),(0,b),(0,-b)$, qui sont les points d'intersection de l'ellipse avec des deux axes de symétrie, sont appelés **sommets de l'ellipse**.

L'excentricité de l'ellipse vérifie $e=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$.

Le choix du repère réduit est fait de telle sorte que $a>b$, ce qui justifie la terminologie demi-**grand** axe et demi-**petit** axe.
On pourrait définir un autre repère (parfois également appelé *réduit*) dans lequel $b>a$.

Théorème 17.7. **Paramétrage**

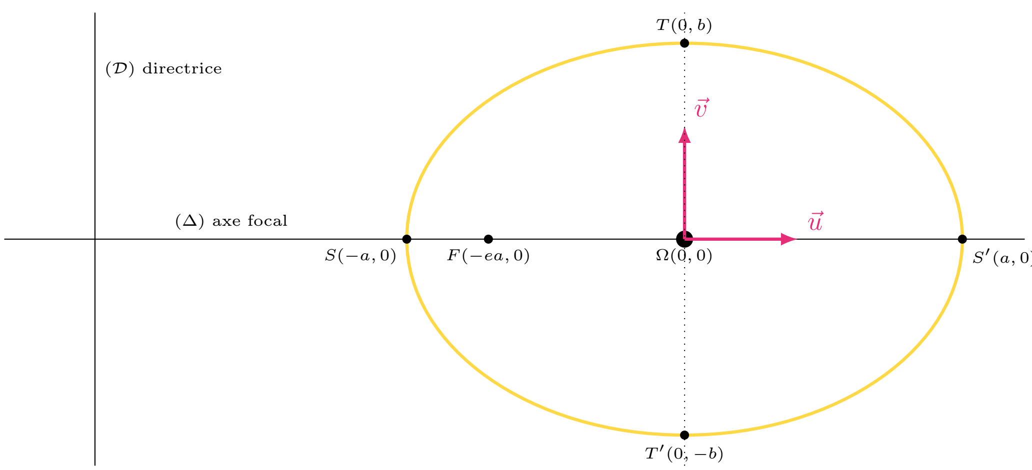
Un paramétrage d'une ellipse $(\mathcal{E})$ d'excentricité e dans son repère réduit est $\begin{cases} x(t)=a\cos(t) \\ y(t)=b\sin(t)\end{cases} \quad t\in\mathbb{R}.$

L'étude de ce paramétrage permet de tracer l'ellipse.
Attention, dans ce paramétrage, t ne désigne pas l'angle polaire du point $M(t)\in(\mathcal{E})$.

Illustration 17.4. **Équation réduite d'une ellipse**

On représente l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'excentricité e dans son repère réduit associé $\mathcal{R}_0=(\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
Dans ce repère, $(\mathcal{E})$ admet pour équation (réduite)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



- ✗ Le milieu Ω de $[SS']$ est l'origine du repère $\mathcal{R}_0$ et le centre de l'ellipse.
- ✗ Le foyer F de $(\mathcal{E})$ a pour coordonnées $(-ae;0)$.
- ✗ La directrice a pour équation cartésienne :

$$(\mathcal{D}): x=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

- ✗ Une paramétrisation $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ de $\mathcal{E}$ est donnée par

$$f(t)=\begin{pmatrix} a\cos(t) \\ \\ b\sin(t)\end{pmatrix}.$$

Exercice 17.3.
Déterminer une équation réduite de l'ellipse de foyer F dont les coordonnées sont $F(1,1)$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, de directrice $(\mathcal{D})$ d'équation cartésienne $(\mathcal{D}) : x - y = 1$ dans $\mathcal{R}$ et d'excentricité $e = \frac{1}{2}$. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du centre et des sommets de l'ellipse.

3 Hyperboles

On reprend les calculs précédent dont la conclusion va différer de celle pour l'ellipse, car $e > 1$. Toujours dans le repère $\mathcal{R}_1 = (F, \vec{u}, \vec{v})$,

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 = e^2\left(x'+d\right)^2 &\iff (1-e^2)\left(x' - \frac{de^2}{1-e^2}\right)^2 + y'^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2} \\ &\iff \frac{\left(x' + \frac{de^2}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{ed}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y'^2}{\left(\frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2} = 1. \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{cases} \tilde{x} &= x' + \dfrac{de^2}{e^2-1} \\ \tilde{y} &= y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a &= \dfrac{ed}{e^2-1} \\ b &= \dfrac{ed}{\sqrt{e^2-1}} \end{cases},$$

et Ω le point de coordonnées $\left(-\dfrac{de^2}{e^2-1}, 0\right)$ dans $\mathcal{R}_1$, on peut définir un nouveau repère $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel l'ellipse a pour équation

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1.$$

Le point Ω est encore le milieu du segment $[SS']$ où S et S' sont les deux sommets de l'hyperbole.

Définition 17.7. **Repère réduit d'une hyperbole**
Soit $(\mathcal{H})$ une hyperbole de directrice $(\mathcal{D})$, de foyer F et d'excentricité e.
Soient S, S' ses sommets, et Ω le milieu de $[SS']$.

On appelle **repère réduit associé à l'hyperbole** $\mathcal{H}$, le repère orthonormé direct $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \dfrac{\vec{\Omega F}}{\|\vec{\Omega F}\|}$.

Les axes d'équation (dans $\mathcal{R}_0$) $x = 0$ et $y = 0$ sont des axes de symétrie pour l'hyperbole et le point d'intersection, Ω, s'appelle le **centre** de l'hyperbole.

Théorème 17.8. **Équation réduite d'une hyperbole**
Dans son repère réduit $\mathcal{R}_0$, une hyperbole $\mathcal{H}$ admet pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

avec $a = \Omega S$, $c = \Omega F = ea$ et $b > 0$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.

L'excentricité de l'ellipse vérifie $e = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}$.

Théorème 17.9. **Paramétrage de l'hyperbole**
Un paramétrage d'une hyperbole dans son repère $\mathcal{R}_0$ est

$$\begin{cases} x(t) = \varepsilon a \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = b \operatorname{sh}(t) \end{cases} \quad (\varepsilon, t) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{R}$$

Théorème 17.10. **Asymptotes de l'hyperbole**
Dans le repère réduit $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ les asymptotes de l'hyperbole ont pour équation $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Preuve. Lorsque $t \to +\infty$, on a :

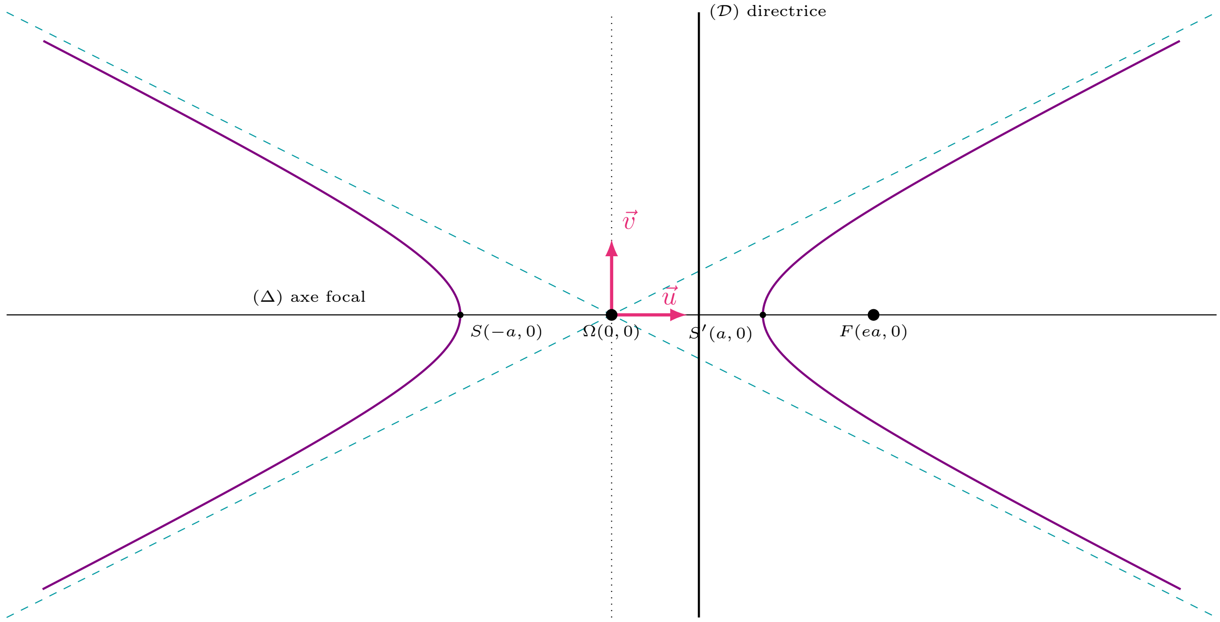
$$\frac{b\text{sh}(t)}{a\text{ch}(t)} \to \frac{b}{a}, \quad \text{et} \quad b\text{sh}(t) - \frac{b}{a} \times a\text{ch}(t) = -be^{-t} \to 0.$$

On utilise alors les propriétés de symétrie de l'hyperbole pour obtenir la second asymptote. $\square$

Illustration 17.5. **Équation réduite d'une hyperbole**

On représente l'hyperbole $(\mathcal{H})$ d'excentricité e dans son repère réduit associé $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Dans ce repère, $(\mathcal{H})$ admet pour équation (réduite)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



✗ Le milieu Ω de $[SS']$ est l'origine du repère $\mathcal{R}_0$ et le centre de l'hyperbole.
✗ Le foyer F de $(\mathcal{E})$ a pour coordonnées $(ae;0)$.
✗ La directrice a pour équation cartésienne :

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

✗ Les sommets S et S' ont pour coordonnées $(-a,0)$ et $(a,0)$.
✗ Les asymptotes ont pour équation

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

✗ Une paramétrisation $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de chaque branche de $\mathcal{E}$ est donnée par

$$f(t) = \begin{pmatrix} \pm a\text{ch}(t) \\ \\ b\text{sh}(t) \end{pmatrix}.$$

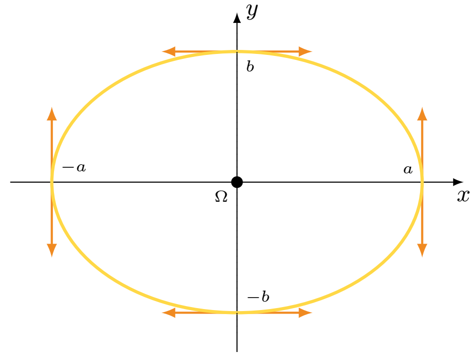
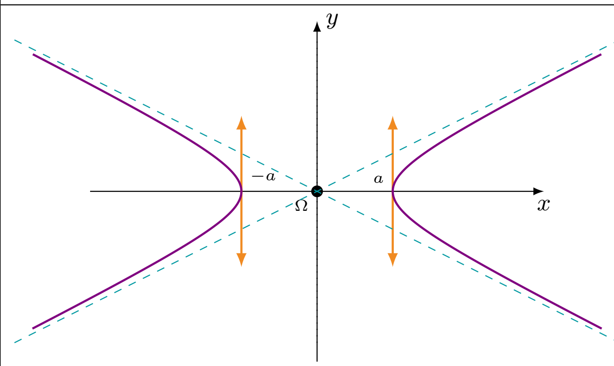
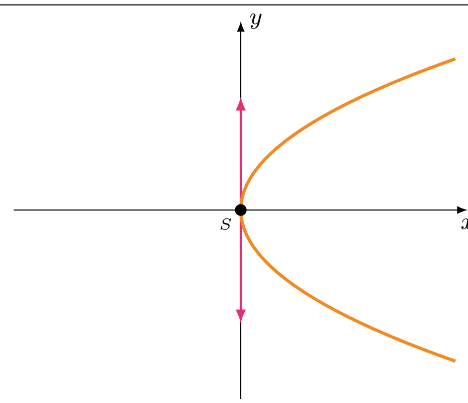
Exercice 17.4.

Déterminer une équation réduite de l'hyperbole de foyer F dont les coordonnées sont $F(1,1)$ dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, de directrice $(\mathcal{D})$ d'équation cartésienne $(\mathcal{D}) : x - y = 1$ dans $\mathcal{R}$ et d'excentricité $e = 2$. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}$, du centre et des sommets de l'hyperbole.

Exercice 17.5.

On dit qu'une hyperbole est équilatère si ses deux asymptotes sont perpendiculaires. Quelle est l'excentricité d'une hyperbole équilatère?

Tableau de synthèse

Nature	Équation réduite	Paramétrage	Représentation
Ellipse	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t) &= a\cos(t) \\ y(t) &= b\sin(t)\end{cases}$	
Hyperbole	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\begin{cases} x(t) &= \pm a\mathrm{ch}(t) \\ y(t) &= b\mathrm{sh}(t)\end{cases}$	
Parabole	$y^2=2px$	$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) &= t\end{cases}$	

4 Réduction des équations algébriques des coniques

Dans cette section, les coniques ne sont plus définies par leur foyer et leur droite directrice mais à l'aide d'une équation cartésienne sur les coordonnées de leurs points.

On se place à nouveau dans un repère orthonormé directe $\mathcal{R}=(O,i,j)$ du plan euclidien, où $\mathcal{B}=(i,j)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Définition 17.8. **Équation cartésienne d'une conique**

On appelle **conique** l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x,y) vérifient :

$$(\mathcal{C}) : \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+dx+ey+f=0 \quad \text{avec } (\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\} \quad \text{et } d,e,f\in\mathbb{R}.$$

Méthode 17.1. **Identifier une conique à partir de son équation cartésienne**

Considérons la conique d'équation cartésienne

$$(\mathcal{C}) : \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \quad \text{et } d, e, f \in \mathbb{R}.$$

- ✗ Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ alors $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = X^\top AX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
  A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une b.o.n (directe) (ce qui revient à effectuer une rotation du repère initial $\mathcal{R}$);
  C'est l'opération à effectuer en premier.

- ✗ On effectue d'autres changements de bases successifs (notamment par translation) pour simplifier l'expression et identifier la nature de la conique.

Ces étapes sont présentées ci-après dans le détail.

4.1 Première étape : diagonalisation de A dans une b.o.n.d

La matrice $A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est symétrique réelle.
A est diagonalisable dans une base orthonormée directe de vecteurs propres (on note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \mu\}$) :

$$\exists P \in SO_2(\mathbb{R}) : A = PDP^\top \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$X^\top AX = X^\top PDP^\top X = \left(P^\top X\right)^\top D \left(P^\top X\right) = (X')^\top DX' \text{ avec } X' = P^\top X.$$

On pose $X' = P^\top X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et l'équation $(\mathcal{C})$ devient alors

$$(\mathcal{C}') : \lambda x'^2 + \mu y'^2 + \delta x' + \zeta y' + f = 0.$$

La matrice $P \in SO_2(\mathbb{R})$ s'interprète également comme matrice de passage entre deux b.o.n.d de $\mathbb{R}^2$. On a effectué une rotation sur le repère initial $\mathcal{R} = (O, i, j)$.
On a obtenu un nouveau repère $\mathcal{R}' = (O, i', j')$ dans lequel l'expression de la conique est plus simple.

4.2 Deuxième étape : mise sous forme canonique

Puisque $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ la matrice A est non nulle.
Ses valeurs propres ne sont pas toutes deux nulles : $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Distinguons alors trois cas.

- ✗ Supposons $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. L'équation $(\mathcal{C}')$ s'écrit alors :

$$\lambda \left(x' + \frac{\delta}{2\lambda}\right)^2 + \mu \left(y' + \frac{\zeta}{2\mu}\right)^2 + \left(f - \frac{\delta^2}{4\lambda} - \frac{\zeta^2}{4\mu}\right) = 0.$$

  On pose $X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + \frac{\delta}{2\lambda} \\ y' + \frac{\zeta}{2\mu} \end{pmatrix} = X' + \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2\lambda} \\ \frac{\zeta}{2\mu} \end{pmatrix}$ et on obtient l'équation réduite :

$$(\mathcal{C}'') : \lambda x'^2 + \mu y''^2 = g.$$

  On a obtenu un **nouveau repère** $\mathcal{R}'' = (\Omega, i', j')$ par translation du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\delta}{2\lambda} \\ \frac{\zeta}{2\mu} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}' = (O, i', j')$.

  Le centre Ω de ce nouveau repère a pour coordonnées $\left(-\frac{\delta}{2\lambda}, -\frac{\xi}{2\mu}\right)$ dans $\mathcal{R}'$.
  Pour retrouver ses coordonnées dans le repère initial $\mathcal{R}$, on utilise les formules de changement de bases :

$$0 = X'' = X' + \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2\lambda} \\ \frac{\zeta}{2\mu} \end{pmatrix} = P^\top X + \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2\lambda} \\ \frac{\zeta}{2\mu} \end{pmatrix} \text{ donc } X_\Omega = P \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{2\lambda} \\ -\frac{\zeta}{2\mu} \end{pmatrix} = PX'_\Omega.$$

- ✗ Supposons $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$. On obtient alors de manière analogue une équation réduite :

$$(\mathcal{C}'') : \lambda x''^2 + \zeta y'' = g.$$

- ✗ Supposons $\mu \neq 0$ et $\lambda = 0$. On obtient alors de manière analogue une équation réduite :

$$(\mathcal{C}'') : \mu y''^2 + \delta x'' = g.$$

5 Troisième étape : identification

On a obtenu après rotation et translation du repère initial les équations réduites suivantes :

$\lambda, \mu \neq 0$	$\lambda \neq 0, \mu = 0$	$\lambda = 0, \mu \neq 0$
$(\mathcal{C}_1'') : \lambda x^2 + \mu y^2 = g$	$(\mathcal{C}_2'') : \lambda x^2 + \zeta y = g$	$(\mathcal{C}_3'') : \mu y^2 + \delta x = g$

i. $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}$, les trois situations suivantes se présentent:

✗ Si $g > 0$ alors l'équation réduite $(\mathcal{C}_1'')$ peut s'écrire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La courbe obtenue est appelée **ellipse**.

✗ Si $g = 0$ alors le seul point solution de l'équation $(\mathcal{C}_1'')$ est $(0, 0)$. La conique est réduite au centre du repère.

✗ Si $g < 0$ alors l'équation $(\mathcal{C}_1'')$ n'a pas de solution : l'ensemble des points vérifiant $(\mathcal{C}_1'')$ est vide.

Le cas $\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\mu} < \mathbf{0}$ est similaire.

ii. Si $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\mu} < \mathbf{0}$, deux situations peuvent se présenter :

✗ Si $g \neq 0$ alors l'équation $(\mathcal{C}_1'')$ peut s'écrire :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

La conique obtenue est appelée **hyperbole.**

✗ Si $g = 0$ alors l'équation $(\mathcal{C}_1'')$ peut s'écrire

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

La conique obtenue est la réunion de deux droites sécantes.

Le cas $\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\mu} > \mathbf{0}$ est analogue.

iii. Si $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. Alors:

✗ Si $\zeta \neq 0$ alors l'équation ($\mathcal{C}_2''$) peut s'écrire $x^2 = 2py$. La conique obtenue est appelée **parabole.**

✗ Si $\zeta = 0$ alors l'équation ($\mathcal{C}_2''$) devient $\lambda x^2 = g$. Suivant le signe de $r = \frac{g}{\lambda}$ on obtient :
✓ la réunion de deux droites parallèles ($r > 0$; d'équations $x = \pm\sqrt{r}$)
✓ une droite ($r = 0$; d'équation $x = 0$)
✓ ou bien l'ensemble vide ($r < 0$).

iv. Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$. Alors:

✗ Si $\delta \neq 0$ alors l'équation $(\mathcal{C}_3'')$ peut s'écrire : $y^2 = 2px$. La conique obtenue est une **parabole.**

✗ Si $\delta = 0$ alors l'équation $(\mathcal{C}_3'')$ devient $\mu y^2 = g$. La nature dépend du signe de $r = \frac{g}{\mu}$.
✓ la réunion de deux droites parallèles ($r > 0$; d'équations $y = \pm\sqrt{r}$)
✓ une droite ($r = 0$; d'équation $y = 0$)
✓ ou bien l'ensemble vide ($r < 0$).

6 Classification des coniques

Théorème 17.11. **Classification des coniques**

On considère la conique d'équation $(\mathcal{C}) : \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + dx + ey + f = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

On note $\Delta = \alpha\gamma - \beta^2 = \lambda\mu = \det(A)$ où λ, μ sont les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.

i. Si $\Delta > 0$ alors $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.
ii. Si $\Delta = 0$ alors $\mathcal{C}$ est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.
iii. Si $\Delta < 0$ alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

Si la courbe obtenue est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, on parle de **conique propre**. Dans tous les autres cas, on parle de **conique dégénérée**.

Remarque 17.4.
Une conique dégénérée peut avoir une infinité de centres de symétrie (s'il s'agit de deux droites parallèles par exemple).

Exercice 17.6.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la conique $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 4y + 3 = 0$.

Exercice 17.7.
Déterminer les axes de symétries d'une ellipse, d'une hyperbole et d'une parabole et les relier aux espaces propres de la matrice A associée à la conique $\mathcal{C}$.

7 Sélection d'exercices

Exercice 17.8.
Soit $\mathcal{R} = (O, i, j)$ le repère orthonormé direct usuel. On considère le point $F(1; 1)$ et la droite d'équation cartérsienne ($\mathcal{D}) : x - y = 1$ dans $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de directrice ($\mathcal{D}$), de foyer F et d'excentricité $e = 1/2$.

1. Tracer la droite $(\mathcal{D})$, placer le point F et tracer l'axe focal Δ (orthogonal à $\mathcal{D}$ et passant par F) de $\mathcal{E}$.
2. Calculer la distance notée $d = \mathrm{d}(F, (\mathcal{D}))$ du point F à la droite $(\mathcal{D})$.
3. Donner une équation cartésienne (que l'on ne cherchera pas à réduire) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$.
4. Déterminer un repère $\mathcal{R}_1$ orthonormé direct dans lequel la directrice a pour équation cartésienne $x = -d$.
5. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}_1$.
6. Déterminer un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel l'équation de $\mathcal{E}$ est réduite :
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } a > b > 0$$
7. Rappeler la formule permettant d'exprimer les coordonnées $X(M)$ d'un point M dans $\mathcal{R}$ en fonction de ses coordonnées $X_1(M)$ dans $\mathcal{R}_1$. On utilisera la relation de Chasles et une matrice de rotation.
8. Déterminer $X(\Omega), X(S_i)$ avec $S_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ les sommets de $\mathcal{E}$.
9. Tracer $\mathcal{E}$. On donne $a \simeq 0,5$ et $b \simeq 0,4$.
10. Donner une équation cartésienne des axes de symétrie de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$. On demande deux méthodes.

Exercice 17.9.
Soit M un point d'une hyperbole $(\mathcal{H})$, et H, H' ses projetés orthogonaux respectifs sur les asymptotes de $(\mathcal{H})$. Montrer que le produit $MH \times MH'$ est constant lorsque M parcourt $(\mathcal{H})$.

Exercice 17.10.
Soient A et B deux points distincts du plan, et soit I le milieu de $[AB]$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

Exercice 17.11.

Soit $\mathcal{R} = (O, i, j)$ le repère orthonormé direct usuel. On considère le point $F(1;1)$ et la droite d'équation cartésienne $(\mathcal{D}) : x - y = 1$ dans $\mathcal{R}$.
Dans cet exercice, on étudie l'hyperbole $\mathcal{H}$ de directrice $(\ \mathcal{D}\ )$, de foyer F et d'excentricité $e = 2$.

1. Donner une équation cartésienne (que l'on ne cherchera pas à réduire) de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$.
2. Déterminer un repère $\mathcal{R}_1$ orthonormé direct dans lequel la directrice a pour équation cartésienne $x_1 = -d$ où $d = \mathrm{d}(F, (D))$ est à préciser.
3. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}_1$.
4. Déterminer un repère réduit $\mathcal{R}_0 = (\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel l'équation de $\mathcal{H}$ est réduite :
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
5. Déterminer $X(\Omega), X(S_i)$ avec $S_i, i \in \{1, 2\}$ les deux sommets de $\mathcal{H}$.
6. Donner dans $\mathcal{R}_0$ des équations des asymptotes à $\mathcal{H}$.
7. Tracer $\mathcal{H}$. On donne $a \simeq 0,86$ et $b \simeq 1,48$.
8. Donner une équation cartésienne des axes de symétrie de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$. On demande deux méthodes.

Exercice 17.12.

Déterminer la nature, les éventuelles symétries et sommets des coniques définies par leurs équations cartésiennes dans le repère orthonormé direct usuel $\mathcal{R} = (O, i, j)$, puis les tracer :

i. $4x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$.

ii. $x^2 - y^2 + 4x + 2y + 3 = 0$.

iii. $10x^2 + 10x - 3y^2 + 12y - 2 = 0$.

iv. $27x^2 - 16y^2 + 18x - 64y - 12 = 0$.

v. $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$.
Donner l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.

vi. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 16y + 16 = 0$.
Donner l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.

vii. $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y + 6 = 0$.
Donner l'équation dans le repère usuel de l'axe focal et de la directrice puis placer le foyer.

Exercice 17.13.

1. Déterminer la nature de la courbe d'équation $3x^2 + 4xy - \sqrt{5}x - 1 = 0$ dans le repère orthonormé direct (O, i, j). La tracer.
2. Déterminer une paramétrisation de la courbe précédente.
3. En déduire une équation de la tangente au point de la courbe d'ordonnée $y = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ et d'abscisse positive.
4. Résoudre la question précédente sans paramétrisation.

Exercice 17.14.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 3 noté $P(X) = X^3 + \lambda X^2 + \mu X + \delta$.
On considère la courbe $\mathcal{C}$ formée des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $P(y) = P(x)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est soit une droite, soit la réunion d'une droite et d'une conique.

Exercice 17.15.

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan et A un point hors de $(\mathcal{D})$.
Trouver l'enveloppe de la normale en M à (AM) lorsque M parcourt $(\mathcal{D})$.
On se placera dans un repère bien choisi, et on paramétrera la normale par l'abscisse ou l'ordonnée de M.

Exercice 17.16.

Soit $A(1,0)$ le point du plan dont les coordonnées $(1,0)$ sont données dans un repère orthonormé direct.
On considère la parabole d'équation $(\mathcal{C}) : y^2 + x = 1$ et l'ellipse d'équation $(\mathcal{E}) : x^2 + 2y^2 = 1$.
Pour tout $m \neq 0$ on considère la droite Δ_m d'équation $y = m(1-x)$.

1. Montrer que Δ_m recoupe la parabole en un point $M \neq A$ et l'ellipse en un point $N \neq A$. Préciser les coordonnées de M et N.
2. Donner une équation de la tangente en M à la parabole $\mathcal{C}$ et une équation de la tangente en N à l'ellipse $\mathcal{E}$.
3. Déterminer le lieu des points d'intersection I de ces deux tangentes lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice 17.17.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 = 2px$ avec $p > 0$ et soit $A \in \mathcal{P}$ fixé dans tout l'exercice.

1. Déterminer l'équation d'une droite (BC) passant reliant deux points $B, C \in \mathcal{C}$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(AB) \perp (AC)$. Montrer que toute droite (BC) avec $B, C \in \mathcal{C}$ réalisant cette condition passe un point fixe Q.
3. Déterminer le lieu de Q lorsque A décrit $\mathcal{P}$.

Exercice 17.18.

On se place dans un repère orthonormé direct du plan. Soit $\mathcal{C}$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ (où $p > 0$).
Soit $M \in \mathcal{C}$, T la tangente à $\mathcal{C}$ en M et T' la droite symétrique de T par rapport à la droite verticale passant par M.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est paramétrée par $M(t) \begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'enveloppe des droites T' lorsque M décrit $\mathcal{C}$.

Exercice 17.19.

Soit $(\mathcal{E})$ l'ellipse paramétrée par $M(t) \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$ dans un repère orthonormé direct du plan.

Déterminer l'enveloppe des droites $(M(t)M(t + \frac{\pi}{2}))$.

Exercice 17.20.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$, et $\mathcal{D}$ la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
On considère un point variable P de $\mathcal{C}$, et on appelle S le point d'intersection de la tangente à $\mathcal{C}$ en P et de $\mathcal{D}$. On appelle encore M le point d'intersection de (BS) et de la perpendiculaire à (AB) passant par P.
Montrer que le lieu géométrique des points M est une ellipse.

Exercice 17.21.

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de centre O, de demi grand axe a et de demi petit axe b. Si M est un point de $\mathcal{E}$, on appelle P, Q les points d'intersection de $\mathcal{E}$ et de la parallèle à la tangente à $\mathcal{E}$ en M passant par O. Soit alors (C) un cercle de rayon r tangent simultanément à cette tangente et à (PQ). Prouver que $PQ \times r = ab$.

Exercice 17.22.

Soit $\mathcal{P}$ une parabole, F son foyer et O son sommet. Montrer que le projeté orthogonal H de F sur la tangente en un point M de $\mathcal{P}$ est également sur la tangente en O à $\mathcal{P}$.

Exercice 17.23.

Déterminer une équation cartésienne et la nature géométrique de la courbe $\Gamma : \begin{cases} x = 2\cos(t) + \sin(t) \\ y = \cos(t) - \sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.24.

Dans le plan euclidien, on note I un point intérieur à une parabole $\mathcal{P}$. Une droite variable passant par I coupe $\mathcal{P}$ aux points M_1 et M_2. Donner le lieu du point J d'intersection des tangentes à $\mathcal{P}$ en M_1 et M_2 (*on commencera par étudier l'intersection de deux tangentes différentes de la parabole*).