Math PT. 2024 - 2025

Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

4 Applications linéaires : représentation matricielle

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ce chapitre reprend naturellement toutes les notions déjà (ré-)introduites au cours du **Chapitre 2**.

La première section de ce chapitre propose des rappels sur les matrices et les éléments du calcul matriciel.

1 Rappels sur les matrices et le calcul matriciel

Dans cette section, n, p désigneront deux entiers strictement positifs.

1.1 Définition et exemples

Définition 1.
On appelle **matrice** à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$ possédant n lignes et p colonnes:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{1,1}} & \phantom{a_{1,2}} & & j\text{-ème colonne} & & \\ & & & \downarrow & & \end{array} \\ i\text{-ème ligne} \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}). \end{array}$$

Lorsque l'on emploiera la notation ci-dessus, on dira que A est la matrice de *terme général* $a_{i,j}$.

- ✗ Une matrice à n lignes, p colonnes est aussi appelée une matrice de **taille** $n \times p$.
- ✗ L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- ✗ Une matrice de taille $n \times n$ est appelée une matrice carrée de taille n ou une matrice carrée d'**ordre** n.
- ✗ L'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ✗ Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le cœfficient de A situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne sera appelé le cœfficient d'indice (i, j) de A, et sera noté $[A]_{i,j}$.

☞ L'important est de retenir que, par convention, le premier indice correspond au numéro de la ligne, et le second à celui de la colonne.

Définition 2. **Matrices particulières**

✗ La matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les cœfficients sont nuls est appelée **matrice nulle** de taille $n \times p$, et notée $0_{n,p}$.

✗ Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la formule $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$ est appelée **matrice diagonale**.
Elle est notée $\operatorname{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$:

$$\operatorname{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit des matrices dont les seuls cœfficients pouvant non nuls sont situés sur la diagonale du tableau. Attention, une matrice diagonale peut avoir des coefficients nuls aussi sur la diagonale. D'ailleurs la *matrice nulle* est une matrice diagonale.

✗ La matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée **matrice identité** de taille n, et notée I_n :

$$I_n = \operatorname{diag}(1, 1, ..., 1).$$

✗ Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la formule $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$ est appelée **matrice triangulaire supérieure**.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

✗ Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la formule $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0)$ est appelée **matrice triangulaire inférieure**.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

☞ Une matrice diagonale est donc à la fois une matrice triangulaire supérieure **et** inférieure.

✗ Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$. La matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les cœfficients sont nuls, excepté le cœfficient d'indices (i,j) qui vaut 1, est notée $E_{i,j}$.

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2 Structure d'espace vectoriel

Étant données deux matrices de même dimension, on définit leur somme de manière naturelle, c'est-à-dire cœfficient par cœfficient.

Définition 3.
Soient deux matrices $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note alors $A+B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général $c_{i,j}$ définie par

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}.$$

☠ Si A et B n'ont pas la même dimension, alors la somme $A+B$ n'est pas définie.

On peut aussi définir le produit d'une matrice par un scalaire, obtenu en multipliant chacun des termes de la matrice par le scalaire considéré.

Définition 4.
Soient $\lambda\in\mathbb{K}$ et $A=(a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note alors $\lambda\cdot A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de terme général $c_{i,j}$ défini par

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\ c_{i,j}=\lambda a_{i,j}.$$

Proposition 1.
$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 2.
La famille formée des matrices $E_{i,j}$, avec $(i,j)\in [\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de sorte que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))=np$.

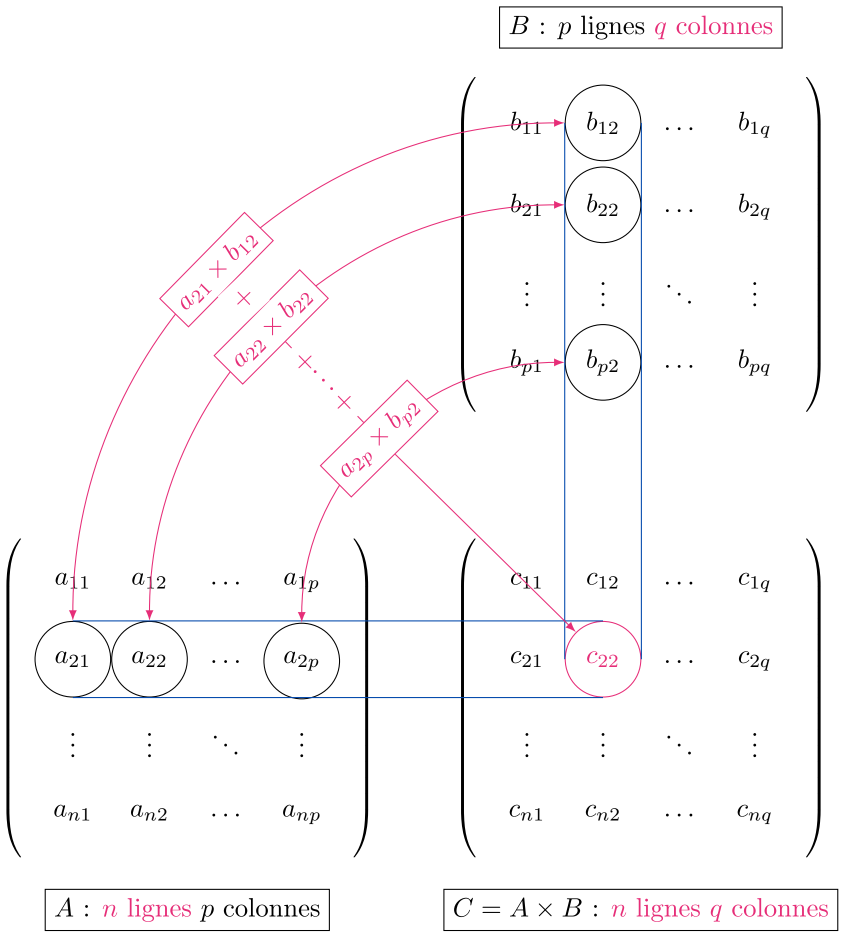
1.3 Produit de matrices

Contrairement à la somme, le produit de deux matrices n'est pas défini par le produit terme-à-terme de leurs cœfficients. On commence par définir le produit d'une matrice ligne par une matrice colonne.

Définition 5. **Produit matriciel**
On définit le **produit** d'une matrice A de n lignes et p colonnes avec une matrice B de p lignes et q colonnes comme la matrice de n lignes et q colonnes suivante:

$$\forall A=(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall B=(b_{k,j})_{\substack{1\leq k\leq p\\1\leq j\leq q}}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ AB=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq q}}\in\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}).$$

✎ Le coefficient (i,j) du produit AB est le produit de la i-ème ligne de A avec la j-ème colonne de B. On peut disposer (**sur son brouillon**) les calculs ainsi:



Remarque 1.

☠ On ne peut calculer le produit AB que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.

En particulier, il peut être possible de calculer le produit AB mais pas le produit BA! Si les deux matrices sont carrées de même taille, on peut calculer AB et BA mais ces deux produits ne sont (en général) pas égaux.

Exemple 1.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $M0_n = 0_nM = 0_n$ et $I_n \times M = M \times I_n = M$.

Exercice 1.

Calculer les produits AB et BA avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Proposition 3. **Produit de matrices diagonales**

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ des scalaires. On a alors

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \times \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mathrm{diag}\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n).$$

En d'autres termes, le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale obtenue en faisant le produit terme-à-terme des cœfficients diagonaux.

Proposition 4. **Distributivité du produit par rapport aux combinaisons linéaires**

Soient A, B, C trois matrices telles que B, C soient de même taille, et λ, μ des éléments de $\mathbb{K}$.

i. Si A est compatible à gauche de B on a $(\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \times B)$.
ii. Si A est compatible à gauche de B et de C, on a $A \times (\lambda \cdot B + \mu \cdot C) = \lambda \cdot A \times B + \mu \cdot A \times C$.
iii. Si A est compatible à droite de B et de C, on a $(\lambda \cdot B + \mu \cdot C) \times A = \lambda \cdot B \times A + \mu \cdot C \times A$.
iv. Si A est compatible à gauche de B, et B est compatible à gauche de C, on a $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

1.4 Puissances de matrices

Définition 6. **Puissances de matrices**

Soient $k \in \mathbb{N}$ et A une matrice **carrée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **puissance** k-ième de A, et on note A^k, la matrice

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

Proposition 5. **Puissances de matrices diagonales**

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n$ des scalaires. On a alors, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k).$$

En d'autres termes, les puissances d'une matrice diagonale sont les matrices diagonales obtenues élevant à la puissance les cœfficients diagonaux.

Proposition 6. **Formule du binôme**

Soient A et B deux matrices carrées de même taille qui **commutent**. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}.$$

Exercice 2.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = A - 2I$.

1. Expliciter N et calculer N^2 puis N^3. En déduire, pour $k \geq 3$ l'expression e N^k.
2. Donner une expression, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de A^n en fonction de n de I, de N et N^2.
3. En déduire le tableau matriciel explicite de A^n.

1.5 Polynômes de matrices

Définition 7.

Soient $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On définit l'évaluation de P en A comme la matrice

$$P(A) = a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

Lorsque $P(A) = 0_p$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de A.

☞ On peut utiliser les propriétés des polynômes pour obtenir des informations sur les matrices (*inverse*, puissances).

Exercice 3.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 3X + 2$.

(1) Calculer $P(A)$.
(2) Soit $n \geq 3$. Effectuer la division euclidienne de X^n par P.
(3) En déduire l'expression de A^n.

1.6 Matrices carrées inversibles

Définition 8. **Matrice inversible**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est **inversible** s'il existe une matrice M^{-1} de taille n telle que

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I_n.$$

La matrice M^{-1} est alors appelée **l'inverse** de M. L'ensemble des matrices inversibles d'ordre n à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{GL}_n\mathbb{K}$, et est appelé **groupe linéaire d'ordre n sur** $\mathbb{K}$.

☞ Pour montrer qu'une matrice A est l'inverse d'une matrice M de taille n, il est inutile de prouver les deux formules $AM = I_n$ et $MA = I_n$: il suffit d'en prouver une, l'autre sera alors nécessairement vraie.

Exemple 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La matrice I_n est inversible, de sorte que $I_n^{-1} = I_n$.

Proposition 7.
Soient A et B deux matrices inversibles d'ordre n. Alors le produit AB est inversible et l'on a
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 8.
Soit M une matrice inversible. Alors M^{-1} l'est également, et $\left(M^{-1}\right)^{-1} = M$.

Exercice 4.
Soit M une matrice carré d'ordre n et a, b, c des scalaires tels que $aM^2 + bM + cI_n = 0_n$. Montrer que si c est non nul, alors M est inversible.

Proposition 9. **Matrice diagonale inversible**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que $a_1, \ldots, a_n$ des scalaires non nuls. Alors la matrice $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible, d'inverse $\operatorname{diag}\left(a_1^{-1}, \ldots, a_n^{-1}\right)$.

Proposition 10. **Matrice inversible et équation matricielle**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a équivalence

i. A est inversible
ii. $\forall\, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'équation matricielle $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution.

Auquel cas, on a
$$X = A^{-1}Y.$$

On l'a mentionné ci-avant, pouvoir inverser une matrice A revient à pouvoir trouver une unique solution au système $AX = Y$, ce qui revient à dire que ce système est de Cramer.
La méthode du pivot de Gauss pour la résolution de système permet alors d'obtenir plusieurs résultats.

Proposition 11.
Soit A une matrice carrée de taille n.
Toute matrice obtenue à partir de A par des *opérations sur les lignes* (introduites dans la méthode du pivot de Gauss) a les même propriétés d'inversibilité que A.

Une première conséquence de ce résultat est le corollaire suivant qui caractérise les matrices triangulaires inversibles.

Proposition 12. **Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires**
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure). Alors, T est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

☠ Ce critère ne marche que si la matrice est triangulaire.
Il n'est pas question de dire qu'une matrice quelconque sans zéro sur la diagonale est inversible !
Par exemple,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
n'est pas inversible (et pourtant n'a aucun zéro sur la diagonale).

1.7 Transposition d'une matrice

Définition 9. **Transposée**
Soient $n, p \geqslant 1$ des entiers, et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une matrice de taille $n \times p$.
On appelle alors **transposée** de A, et on note ${}^tA$ ou $A^\top$, la matrice B de taille $p \times n$ dont le terme général $b_{i,j}$ est donné par $b_{i,j} = a_{j,i}$ pour $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$.

La transposée d'une matrice M est la matrice dont les lignes sont les colonnes de M ou, ce qui revient au même, la matrice dont les colonnes sont les lignes de M.

Exemple 3.

- ✗ La transposée de $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$, et celle de $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.
- ✗ La transposée de $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_n\end{pmatrix}$ et celle de $\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_p\end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$.

Remarque 2.
Pour calculer la transposée d'une matrice, il suffit donc d'opérer une symétrie sur ces termes par rapport à la diagonale de la matrice, ce qui revient à intervertir les indices de lignes et de colonnes dans les cœfficients de celle-ci.

Proposition 13.
Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et M, N deux matrices. On a

i. $\left(M^\top\right)^\top = M$.
ii. Si M et N ont même taille on a $(\lambda M + \mu N)^\top = \lambda M^\top + \mu N^\top$ (en d'autres termes, $M \mapsto M^\top$ est donc une application linéaire).
iii. Si M est compatible à gauche de N on a $(MN)^\top = N^\top \cdot M^\top$.
iv. Si M est inversible, alors $M^\top$ l'est également, de sorte que $\left(M^\top\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^\top$.

Définition 10. **Matrices symétriques et antisymétriques**

- ✗ Une matrice carrée M est dite **symétrique** si $M^\top = M$. On notera $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
- ✗ Une matrice carrée M est dite **antisymétrique** si $M^\top = -M$. On notera $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Remarque 3.

- ✗ Une matrice qui n'est pas carrée ne peut pas être symétrique.
- ✗ Les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique A sont nuls, puisque l'on a $a_{i,i} = -a_{i,i}$ pour tout i.

Exemple 4.

- ✗ Toute matrice symétrique de taille 3 est de la forme $\begin{pmatrix}\alpha&a&b\\a&\beta&c\\b&c&\gamma\end{pmatrix}$, avec $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des scalaires.
- ✗ Toute matrice antisymétrique de taille 3 est de la forme $\begin{pmatrix}0&-a&-b\\a&0&-c\\b&c&0\end{pmatrix}$, avec a, b, c des scalaires.

Proposition 14.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $M \times M^\top$ et $M^\top + M$ sont symétriques.

1.8 Matrices semblables, matrices diagonalisables

Définition 11. **Matrices semblables**
Soient $n \geqslant 1$ un entier et A, B des matrices carrées d'ordre n. On dit que A est **semblable** à B s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$A = PBP^{-1}.$$

Proposition 15.
Soient N et P des matrices carrées de même taille, de sorte que P soit inversible. Alors pour tout entier n, on a
$$\left(PNP^{-1}\right)^n = PN^nP^{-1}.$$

☞ Lorsque deux matrices sont semblables, il est aisé de calculer les puissances de l'une à partir des puissances de l'autre. Une matrice A étant donnée, il est donc intéressant de chercher une matrice B **la plus simple possible** qui est semblable à A; typiquement on cherchera une matrice B diagonale (qui présente l'intérêt de posséder des puissances très simples à calculer).

Définition 12. **Matrice diagonalisable**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et M une matrice carrée de taille n. On dit que M **est diagonalisable** s'il existe une matrice diagonale D, ainsi qu'une matrice inversible P de taille n tels que
$$M = PDP^{-1},$$
en d'autres termes, M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

☞ L'étude des matrices diagonalisables sera faite dans un chapitre ultérieur.

1.9 Trace d'une matrice

Définition 13. **Trace d'une matrice**
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de taille n. On appelle **trace** de A, et on note $\mathrm{tr}(A)$, la somme de ses termes diagonaux. En d'autres termes:
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 16. **Propriétés de la trace**
Soient A, B deux matrices de taille n, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a alors les résultats suivants.

i. $\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda\mathrm{tr}(A) + \mu\mathrm{tr}(B)$ (en d'autres termes la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$) ;
ii. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Exercice 6.
Montrer que si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors elles ont la même trace.

2 Représentation matricielle des applications linéaires en dimension finie

Dans cette section, les lettres E, F, G désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension **finie**.

2.1 Matrice d'un vecteur et d'une famille dans une base

Définition 14.
Soient $n = \dim(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in E$, dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont $(u_1, \dots, u_n)$. On appelle **matrice** de u dans la base $\mathcal{B}$, et l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice colonne de taille $(n, 1)$ formée des coordonnées de u dans cette base:
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.
Soit u le vecteur de $\mathbb{K}^2$ tel que $u = i + 2j$ où (i, j) est la base canonique de $\mathbb{K}^2$. La matrice de u dans la base (i, j) est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, celle dans la base $(i + j, i)$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

☞ On peut identifier tout vecteur de $\mathbb{K}^2$ avec sa matrice dans la base canonique.

Exemple 6.

Soit le polynôme $P = X^2 - X + 2 \in \mathbb{K}_2[X]$. Sa matrice dans la base $(1, X, X^2)$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition 15.
Soient $n = \dim(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **matrice de la famille** $(u_1, \ldots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$, et l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_p)$ la matrice de taille (n, p) dont la j-ième colonne est la matrice de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

2.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 16. **Matrice d'une application linéaire**
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = ({e_1}', \ldots, {e_n}')$ une base de F.
On appelle **matrice de** f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, et l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$, la matrice dont la j-ième colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_j))$, c'est-à-dire la matrice de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_n \end{array} .$$

Remarque 4.
À une application linéaire sont donc associées différentes matrices, selon les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ choisies.

☞ Dans le cas où f est un endomorphisme et où l'on choisit $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est appelée **matrice de** f **dans la base** $\mathcal{B}$. On peut donc donner la définition restreinte suivante.

Définition 17. **Matrice d'un endomorphisme**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On appelle **matrice de** f **dans la base** $\mathcal{B}$, et l'on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, la matrice dont la j-ième colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e_j))$, c'est-à-dire la matrice de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans la base $\mathcal{B}$.

☞ Pour calculer la matrice d'un endomorphisme f dans une base $\mathcal{B}$, on commence par calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}$ par f, puis on décompose celles-ci dans la base $\mathcal{B}$.
Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de E, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f)$.

Exemple 7.
Supposons $\dim(E) = n$. Alors dans **n'importe quelle base** de E:

- ✗ la matrice de id_E est la matrice I_n;
- ✗ la matrice de $0_{\mathcal{L}(E)}$ est la matrice 0_n;
- ✗ si $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice de l'homothétie $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ de rapport λ est la matrice scalaire λI_n.

Exercice 7.
Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on pose $\Phi(P) = P + X^2 P''$.
1. Montrer $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$.
2. Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Proposition 17. **Caractérisation d'une application linéaire par une matrice**
Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = ({e_1}', \ldots, {e_n}')$ une base de F. Alors, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Remarque 5.

- ✗ Une fois que l'on a fixé deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, chaque matrice correspond donc à une unique application linéaire. Mais dans l'absolu, une matrice correspond à différentes applications linéaires: tout dépend du couple de bases dans lequel on choisit d'interpréter cette matrice!

- ✗ Étant donnée $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe donc une unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(f)$ (il s'agit de l'application qui envoie le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ sur la j-ième colonne de M), appelée l'*application linéaire canoniquement associée à M*.

Proposition 18. **Stabilité et représentation par blocs**

Soient F, G deux sous-espaces supplémentaires de E, de dimensions respectives $p, n-p$ et n, et une base adaptée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ à la décomposition $E = F \oplus G$. Soit encore $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, F est stable par f si et seulement si la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ n-p \text{ lignes} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & . & & . \\ 0 & \cdots & 0 & . & & . \\ & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{p \text{ colonnes}} \underbrace{\qquad\qquad}_{n-p \text{ colonnes}} \end{array}$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0_{n-p,p} & C \end{array} \right),$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et $0_{n-p,p}$ est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.
Une telle matrice est dite **définie par blocs**.

Exercice 8.

Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ possède un plan et une droite stable.

2.3 Correspondance entre opérations sur les applications linéaires et calcul matriciel

Opération d'une application linéaire sur un vecteur via les matrices associées

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$, on peut écrire de manière informelle:

$$\begin{aligned} M \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \upuparrows & & \upuparrows \\ f(e_1) & \cdots & f(e_p) \\ \downdownarrows & & \downdownarrows \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_p f(e_p) \\ &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p) \\ &= f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Cette observation se formalise comme suit.

Proposition 19.

Soient $\Phi : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Alors

$$\forall u \in E,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\Phi(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\Phi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Remarque 6.

- ✗ Dans le cas d'un endomorphisme $\Phi \in \mathcal{L}(E)$, on a, pour toute base $\mathcal{B}$ de E,
$$\forall u \in E, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\Phi(u)\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u\right).$$
- ✗ Soit $u \in E$ et $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$ sont deux bases de E, on peut effectuer le produit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\Phi) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}''}\left(u\right)$ puisque ces matrices sont compatibles, mais le résultat ne sera *a priori* pas égal à la matrice de $\Phi(u)$, dans quelque base que ce soit.

Exercice 9.

Soit $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ admettant $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour matrice dans la base $(1, 1+X, X^2)$.

1. Donner une expression explicite de $\Phi(P)$ pour $P \in \mathbb{K}_2[X]$, et montrer que Φ est un projecteur.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

Le résultat suivant permet de calculer le noyau et l'image d'une application linéaire à partir d'une matrice représentant celle-ci.

Proposition 20.

Supposons $\dim(F) = n$, et considérons des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F.
Soit encore $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et M la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. On a:

i. Pour tout $u \in E$: $f(u) = 0_F$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = 0_{n,1}$.
ii. Pour tout $v \in F$: $v \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $\exists u \in E,\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\left(v\right) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(u\right).$

☞ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice de f dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.
On pose alors $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K});\ MX = 0_{n,1}\}$.
On en déduit que pour déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, on peut commencer par déterminer une base $U_1, \ldots, U_k$ de $\mathrm{Ker}(M)$: $\mathrm{Ker}(f)$ admettra alors $u_1, \ldots, u_k$ pour base, où chacun des u_i est tel que $U_i = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$.

Sommes, compositions et inverses d'applications linéaires via les matrices associées

Les résultats suivants indiquent que le calcul algébrique sur les applications linéaires correspond au calcul matriciel: la correspondance entre matrices et applications linéaires présente donc une contrepartie opératoire. Chaque problème d'algèbre linéaire peut ainsi être considéré comme un problème matriciel, ou comme un problème sur les applications linéaires: il peut donc être résolu en utilisant indifféremment les techniques de l'une ou l'autre de ces théories.

Proposition 21.

On munit E, F, G de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$. Soient encore $\lambda \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$, $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, $h \in \mathcal{L}(F, G)$ et $h_2 \in \mathcal{L}(E)$. On a alors les résultats suivants.

i. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda f) = \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$;
ii. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f + g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(g)$;
iii. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(h \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(h) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$;
iv. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(h_2^k) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(h_2)\right)^k.$

Exemple 8.

Supposons $\dim(E) = n$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 - 2f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Alors si M désigne sa matrice dans une base quelconque, celle-ci vérifie $M^3 - 2M = 0_n$.

Théorème 1.

Supposons $\dim(E) = p$, $\dim(F) = n$ et considérons des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}'$ de F.
Alors, l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{array}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 2.
On a $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E)\cdot\dim(F)$.

Preuve. Soit $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On a prouvé que $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes, donc ils ont même dimension. D'où le résultat, car $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p = \dim(E) \times \dim(F)$. □

Le résultat suivant prouve que les isomorphismes correspondent aux matrices inversibles.

Proposition 22.
Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F. Soit encore $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
Alors, f est inversible si et seulement si sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ l'est, et dans ce cas on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)^{-1}.$$

☞ En particulier dès qu'un endomorphisme est représenté par une matrice inversible, il est bijectif.

2.4 Changement de base

Définition 18.
Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et l'on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice définie par

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E).$$

En d'autres termes, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$: Notant $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$, on forme la matrice de passage comme suit.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } e_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } e_n \end{array} \quad ,$$

et

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & & e_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_1 \\ \\ \leftarrow \text{coordonnée selon } e'_n \end{array}$$

où

$$e'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i, \qquad e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e'_i.$$

Exemple 9.

La matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 23.
Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Pour tout $u \in E$ on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

☞ La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ permet ainsi de passer des coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ à celles dans la base $\mathcal{B}$ (*i.e.* d'exprimer **les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles**).

Remarque 7.

De prime abord il semble que le nom de ces matrices ait été mal choisi... mais en pratique la définition est la bonne. On retiendra par exemple les phrases suivantes:

- ✗ la matrice de passage P d'une ancienne base vers une nouvelle est la matrice des vecteurs de la nouvelle base dans l'ancienne (ce qui est somme toute logique: on décrit les nouveaux vecteurs en fonction de ceux déjà connus);
- ✗ mais cette matrice P donne les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles (pour obtenir les nouvelles en fonction des anciennes il faudra utiliser P^{-1}, voir la **Proposition 24**).

Exemple 10.

Soit $f \in \mathrm{Gl}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $f(\mathcal{B})$. Autrement dit, toute matrice inversible est une matrice de passage.

On démontre que, réciproquement, toute matrice de passage est inversible.

Proposition 24.

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Exemple 11.

La matrice de passage de $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 2 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Si $u \in \mathbb{R}^3$ admet pour coordonnées x, y, z dans la base canonique, alors ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

Exercice 10.

Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

1. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.
2. $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Proposition 25. **Formule de changement de base**

Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ on a:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P^{-1}$$

Proposition 26.

Deux matrices sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme.

Théorème 3. **Trace d'un endomorphisme**

Toutes les matrices associées à un endomorphisme ont la même trace. Celle-ci est appelée **trace** de f et est notée $\mathrm{tr}(f)$.

Exercice 11.

Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

3 Calcul effectif du rang et de l'inverse d'une matrice

3.1 Opérations élémentaires

Définition 19.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}\mathbb{K}$; on note $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.
On appelle opérations élémentaires sur les lignes de A les transformations suivantes, où $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq k$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$:

- ✗ Remplacer la ligne L_i par la ligne λL_i, ce qui est noté $L_i \leftarrow \lambda L_i$;
- ✗ Échanger les lignes L_i et L_k, ce qui est noté $L_i \leftrightarrow L_k$;
- ✗ Remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i + \alpha L_k$, ce qui est noté $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_k$.

Définition 20.

Deux matrices A et A' sont **équivalentes par lignes** si on peut transformer A en A' en effectuant une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

Définition 21. **Matrices élémentaires**

Soient $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq k$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On appelle **matrices élémentaires** les matrices de $\mathcal{M}_n\mathbb{K}$ suivantes.

i. On appelle **matrice de dilatation** toute matrice de $\mathcal{M}_n\mathbb{K}$ de la forme : $D_{n,i}(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.

$$D_{n,i}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & i & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}.$$

ii. On appelle **matrice de transposition** toute matrice de la forme: $P_{n,i,k} = I_n + (E_{i,k} + E_{k,i} - E_{i,i} - E_{k,k})$.

$$P_{n,i,k} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & i & & & & k & & \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}.$$

iii. On appelle **matrice de transvection** toute matrice de $\mathcal{M}_n\mathbb{K}$ de la forme : $T_{n,i,k}(\alpha) = I_n + \alpha E_{i,k}$.

$$T_{n,i,k}(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & & k & & \\ & & & & \downarrow & & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \alpha & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}.$$

Proposition 27.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}\mathbb{K}$; on note $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.
Soit $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq k$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a les résultats suivants.

i. Remplacer la ligne L_i par la ligne λL_i revient à multiplier A par $D_{n,i}(\lambda)$ à gauche.
ii. Échanger les lignes L_i et L_k revient à multiplier A par $P_{n,i,k}$ à gauche.
iii. Remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i + \alpha L_k$ revient à multiplier A par $T_{n,i,k}(\alpha)$ à gauche.

Remarque 8.

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice, et on introduit ainsi la notion de matrices **équivalentes par colonnes**. On montre alors qu'*effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice revient à multiplier celle-ci par des matrices élémentaires à droite*, de même que ci-dessus.

3.2 Rang d'une matrice

Définition 22. **Rang d'une matrice**

Soit M une matrice. On appelle rang de M, et on note $\mathrm{rg}(M)$ le rang de la famille formée des vecteurs colonnes de M.

Proposition 28.

Soit M une matrice. Si f est une application linéaire dont M est la matrice (dans un couple de bases quelconques), alors $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 12.

Déterminer sans calcul l'image et le noyau de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

☞ Pour déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on peut utiliser la méthode suivante.

✗ Donner la matrice M de f dans un couple de bases quelconques.
✗ Appliquer l'algorithme de la base incomplète pour déterminer le rang de la famille formée par les vecteurs colonnes de M, et ainsi une base de $\mathrm{Im}(f)$.
✗ On déduit alors du calcul précédent $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(f))$, et pour déterminer une base du noyau, il suffit de déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ à l'aide de combinaisons linéaires nulles des colonnes de M. En n'oubliant pas de vérifier qu'à ces combinaisons linéaires ne sont pas associés des vecteurs formant une famille liée.

Définition 23.

i. Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si, après la première ligne, chaque ligne non nulle commence par strictement plus de zéros que la ligne précédente.
ii. On appelle **pivot** le premier cœfficient non nul de chaque ligne non nulle d'une matrice échelonnée par lignes.

☞ Pour démontrer que toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée, il suffit d'utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan.

Remarque 9.

Soit A une matrice échelonnée par lignes de taille $n \times p$. Soit r le nombre de lignes non nulles de A. Alors $r \leqslant \min(n,p)$. Pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, soit j_k l'indice de colonne du pivot de la ligne k. Alors $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leqslant p$, les pivots de A sont les cœfficients $a_{1,j_1}, \dots, a_{r,j_r}$ et A est de la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix}
0 & \cdots 0 & a_{1,j_1} & & \cdots & & & & & a_{1,p} \\
0 & & 0 & \cdots & 0 & a_{2,j_2} & \cdots & & & a_{2,p} \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & 0 & a_{r,j_r} & \cdots & a_{r,p} \\
0 & & & \cdots & & & & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & & & \cdots & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Proposition 29.
Le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots de toute matrice échelonnée qui lui est équivalente par lignes.

☞ Autrement dit, partant d'une matrice dont on cherche à connaître le rang, on fait des opérations sur ses lignes jusqu'à obtenir une matrice échelonnée dont le rang est "lisible".

Remarque 10.
On définit de même la notion de système échelonné. Le rang d'un système est alors égal au nombre de pivot de tout système échelonné qui lui est équivalent, via des opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition 30.
Le rang d'une matrice est le rang de la famille formée de ses lignes. En d'autres termes, on a $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(M^\top)$ pour toute matrice M.

3.3 Calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Proposition 31.
Une matrice de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.

☞ Comme les opérations élémentaires préservent le rang, si la question est uniquement de savoir si une matrice est inversible ou non, on peut donc lui faire subir l'algorithme de Gauss-Jordan jusqu'à obtenir une matrice triangulaire qui aura les mêmes propriétés d'inversibilité que la matrice de départ et pour laquelle un critère est connu.

Exemple 12.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? On peut raisonner comme ceci.

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc le rang de ces deux matrices est le même et notamment

$$A \text{ inversible} \iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est inversible.}$$

Or, cette dernière matrice est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale; elle est donc inversible et il en est de même pour A.

En plus de permettre de savoir si une matrice est inversible, l'algorithme de Gauss-Jordan permet de calculer l'inverse de la matrice.

☞ On considère une matrice A carrée de taille n ($n \in \mathbb{N}^*$) dont **on sait** qu'elle est inversible. Pour calculer A^{-1}, on applique l'algorithme du pivot de Gauss **total** sur la matrice A avec comme second membre I_n, en le prolongeant jusqu'à obtenir la matrice identité à la place de A. La matrice obtenue à la place de I_n est alors A^{-1}.

En effet, effectuer une opération sur les lignes d'une matrice revient à multiplier celle-ci à gauche par une matrice inversible. Si on appelle $P_1, \ldots, P_k$ les matrices inversibles correspondants aux opérations effectuées pour passer de la matrice M à $I_n n$, on a alors l'égalité matricielle suivante, où $Q = P_k P_{k-1} \cdots P_1 P_0$:

$$QM = I_n.$$

Cela signifie alors que Q est en fait l'inverse de M. Comme on a effectué les mêmes opérations sur la matrice I_n et qu'on a obtenu la matrice N, on a aussi l'égalité :

$$QI_n = N.$$

Autrement dit, $Q = N$, ce qui prouve que N est bien l'inverse de M.

Exemple 13. **Pivot simultané**

Reprenons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

que nous savons être inversible.
Déterminons A^{-1} à l'aide d'un Pivot de Gauss simultané. On présente les choses comme ceci:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On commence donc par faire, comme précédemment, $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

On fait ensuite $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Enfin, on se ramène à des coefficients diagonaux égaux à 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

On peut alors **vérifier** que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et conclure que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13.

Inverser les matrices P et Q ci-dessous à l'aide d'un pivot de Gauss simultané.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 Exercices - Travaux dirigés

Exercice 14.

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel et que $(E, +, \times)$ est stable pour la multiplication matricielle.
2. Soit $F = \{M \in E, \forall A \in E, AM = MA\}$. Déterminer F.
3. Résoudre dans E l'équation $X^2 = X$.
4. Déterminer tous les diviseurs de zéro (les matrices A et B non nulles telles que $AB = 0$) dans E.
5. Soit $A \in E$. Calculer A^n.

Exercice 15.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

2. En déduire $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$. Montrer qu'ils sont en somme directe.

Exercice 16.

Déterminer, selon les valeurs de a et b, le rang de la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$, et donner dans chaque cas des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, où f est l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Exercice 17.

Soit $\mathcal{B} = \left(X^n, X^{n-1}(1+X), X^{n-2}(1+X)^2, \ldots, X(1+X)^{n-1}, (1+X)^n\right)$.
Écrire la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, puis en déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 18.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et ψ définie sur E par : $\psi(M) = AM - MA$.

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de E. Écrire sa matrice dans la base canonique de E.
2. Déterminer le noyau et l'image de ψ.

Exercice 19.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$ sont des droites vectorielles dont on donnera des vecteurs directeurs respectifs u, v et w.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$.
5. Donner une relation entre P, P^{-1}, D et M.

Exercice 20.

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image est le plan $\mathcal{P}\ :\ x + y + z = 0$ et dont le noyau est inclus dans P.

Exercice 21.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. A est-elle inversible ? Si oui, calculer A^{-1}.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X+1)^3$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22.

Soit $u : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ P \longmapsto \left(X^2+1\right)P' - 2X\,P$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $u(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer pour quel(s) entier(s) n, u induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Écrire la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, puis déterminer $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$.
4. Soit $w : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R},\ aX^2 + bX + c \longmapsto a + c$.
Calculer $w \circ v$. En déduire que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$, puis montrer l'égalité.

Exercice 23.

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 6 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f qui lui est canoniquement associé.

1. Caractériser géométriquement f.
2. Déterminer l'image par f du plan $(\mathcal{P})\ :\ x - y - z = 0$.

Exercice 24.

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie, rapporté à une base B.
Caractériser géométriquement les endomorphismes f de E dont la matrice dans B vérifie la relation $M^2 = 2M$.

Exercice 25.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(X) = X - \operatorname{tr}(X)A$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que φ est bijectif si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq 1$.
3. Montrer que si $\operatorname{tr}(A) = 1$ alors φ est une projection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et préciser ses éléments caractéristiques.
4. Discuter selon B l'existence et le nombre de solutions de l'équation $\varphi(X) = B$.

Exercice 26.

Soient $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $F = \operatorname{Vect}(u,v)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker}(f) = F$.

Exercice 27.

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   a. Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
   b. Déterminer une base (u) de $\operatorname{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (v,w) de $\operatorname{Im}(f)$.
   c. Montrer que $\operatorname{Im}\left(f^2\right) = \operatorname{Ker}(f)$.

   Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ nilpotent d'ordre 3, c'est à dire tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$ dont on note M la matrice dans la base canonique.
   On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\operatorname{Im}\left(g^2\right) = \operatorname{Ker}(g)$.

2. a. Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
   b. Montrer que $\left(u, g(u), g^2(u)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
   c. Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
   d. Déterminer $\operatorname{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\operatorname{Ker}(g)$. Pour finir, déterminer $\operatorname{Im}\left(g^2\right)$ puis conclure.

Exercice 28.

On note (J_1, J_2, J_3, J_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par
$$f:\ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto M + (a+d)I_2.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
3. a. Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   b. Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 29. **Matrices de rang r**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, ..., u_r)$ une base de $\operatorname{Im}(A)$.

1. Quelle est la dimension de Ker(A)?
2. Montrer que Im(A) $\subset \operatorname{Ker}(A)$. En déduire que $n \geq 2r$.
3. En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_{n-2r}$ tels que $(u_1, ..., u_r, v_1, ..., v_{n-2r})$ forme une base de $\operatorname{Ker}(A)$.
4. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que
$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) P^{-1},$$
   où I_r désigne la matrice identité de taille r.

Exercice 30. **Réduction des symétries vectorielles**

Soient E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension n et s une symétrie vectorielle de E. Montrer qu'il existe deux entiers $(r, r') \in [\![0, n]\!]^2$ (avec $r + r' \leq n$) et une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_r, u_1, .., u_{r'}, v_1, .., v_{n-r-r'})$ tels que la matrice de s dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Exercice 31. **Matrices nilpotentes d'ordre 2 en dimension 4**

Soit $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice 2, c'est à dire que $N \neq 0$ mais que $N^2 = 0$. Montrer que, nécessairement, N est semblable à l'une des deux matrices ci-dessous

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 32.

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{tr}$.

Exercice 33. **Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Le but de cet exercice est de montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient (au moins) une matrice inversible.

On raisonne par l'absurde. On considère donc un hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne contient aucune matrice inversible.

1. Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $N - \lambda I_n \in H$. Montrer par l'absurde que $\lambda = 0$.

3. Conclure.

Exercice 34.

Soient $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Gl}_m(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$ la matrice définie par blocs

$$T = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

Montrer que T est inversible et préciser son inverse, exprimée par blocs.

Exercice 35. **Base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(E_{i,i} + E_{i,j}))^2$.

2. En déduire que, pour tout $\mathbb{K}-$ espace vectoriel E de dimension n, on peut construire une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée uniquement de projecteurs.