Math PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

6 Déterminant

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désignera l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Théorème fondamental, et expression explicite en dimension 2 et 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant données des matrices $C_1, \ldots, C_n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on notera $[C_1, \ldots, C_n]$ la matrice de taille n dont les colonnes sont $C_1, \ldots, C_n$.

Théorème & Définition 1. **Application déterminant**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes:

i. f est n-**linéaire**, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des n colonnes de son argument: si $C_1, \ldots, C_n$ sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et si $j \in [\![1, n]\!]$, alors $X \mapsto f([C_1, \ldots, C_{j-1}, X, C_{j+1}, \ldots, C_n])$ est dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$;

ii. f est **antisymétrique**, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si B est la matrice obtenue à partir de A en échangeant deux de ses colonnes, alors $f(A) = -f(B)$;

iii. $f(I_n) = 1$.

Cette unique application est appelée **déterminant** et est notée $\det$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, son déterminant sera noté $\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

Preuve. Résultat admis. □

Il résulte de la définition le résultat suivant.

Proposition 1.

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Proposition 2.

Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ des scalaires. On a alors les résultats suivants:

i. $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2.$

ii. $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3$

Remarque 1.

- ✗ On dispose de même d'une formule explicite dans le cas général, mais celle-ci est hors-programme.
- ✗ Pour retrouver la formule *ii.* ci-dessus, on utilise la *règle de Sarrus*, qui consiste a recopier sous le tableau les deux premières lignes de celui-ci, puis à sommer le produit des termes rencontrés le long de chaque diagonale, affublé d'un signe moins si la diagonale est croissante.

Exercice 1.

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

2 Propriétés élémentaires du déterminant d'une matrice carrée

Proposition 3. **Propriétés du déterminant**

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les résultats suivants.

i. $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \det(A)$;
ii. Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul;
iii. Le déterminant d'une matrice dont une colonne est combinaison linéaire des autres est nul;
iv. Le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle est nul;
v. Soient $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A, et $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$. Alors si B est la matrice obtenue à partir de A en effectuant l'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, on a $\det A = \det B$;
vi. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$;
vii. $\det(A^\top) = \det(A)$.
viii. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$;
ix. $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$;

Preuve. Les points *vi.* et *vii.* sont admis. □

☞ En particulier, une qui matrice possède deux colonnes proportionnelles a un déterminant nul.

Remarque 2.

- ✗ Le point *vii.* montre que le déterminant permet de caractériser les matrices inversibles.
- ✗ Le point *ix.* assure que les lignes et les colonnes d'un déterminant jouent le même rôle. Les propriétés *i.*, *ii.*, ,*iii.*, ,*iv.* sont donc également vraies si on considère les lignes au lieu des colonnes.
- ✗ L'opération $C_i \leftarrow \alpha C_i + \lambda C_j$ multiplie la valeur du déterminant par α.
- ✗ Le point *vi.* permet de voir que le déterminant est *invariant par changement de base.* Si A et B sont semblables, avec $A = PBP^{-1}$, alors
$$\det(A) = \det\left(PBP^{-1}\right) = \det(PB) \times \det\left(P^{-1}\right) = \det\left(P^{-1}\right) \times \det(PB) = \det\left(P^{-1}PB\right) = \det(B).$$

3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Proposition 4. **Développement par rapport à une ligne ou une colonne**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note $m_{i,j}$ le terme de M d'indice (i,j), et $M_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de M en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On a alors les formules suivantes:

- ✗ **Développement par rapport à la j-ème colonne**. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$:
$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \times \det M_{i,j}.$$
- ✗ **Développement par rapport à la i-ème ligne.** Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
$$\det M = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \times \det M_{i,j}.$$

Preuve. Résultat admis. □

☞ Ces formules permettent de ramener le calcul d'un déterminant de taille n à un déterminant de taille $n-1$, et en raisonnant par récurrence, on peut ainsi calculer sa valeur.

☞ En dimension 3 les formules de développement par rapport à une colonne sont ainsi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = -x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} - z_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

☞ En pratique on retrouve ces formules ci-dessus en considérant que chaque terme de la somme est le produit d'un coefficient de la colonne choisie, multiplié par le déterminant de *la matrice obtenue en enlevant la ligne et la colonne de ce coefficient*, et multiplié par un signe, qui dépend de la position du coefficient.
On peut facilement mémoriser ce signe à l'aide du tableau :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots & \cdots \\ - & + & - & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \cdots & & \cdots & + \end{bmatrix}$$

Remarque 3.
Pour simplifier le développement d'un déterminant par rapport à l'une de ses colonnes, on peut d'abord transformer la colonne considérée de sorte qu'elle ne contienne qu'un seul terme non nul, en effectuant des opérations élémentaires du type $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, puisque celles-ci ne changent pas la valeur du déterminant.

Corollaire 1. **Déterminant d'une matrice triangulaire**

Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux.

Exercice 2. **Déterminant de Vandermonde**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des scalaires. Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est noté $V(x_1, \ldots, x_n)$ et est appelé *déterminant de Vandermonde*.

4 Exercices type d'application

S'il est aisé de calculer un déterminant (on peut toujours développer par rapport à une ligne ou une colonne, autant de fois que nécessaire), il est plus difficile d'en obtenir une forme factorisée. On présente ici quelques exercices type illustrant les méthodes courantes.

4.1 Calcul en dimension 3

Pour factoriser un déterminant de taille 3, il suffit d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice triangulaire (supérieure).

Exercice 3.

Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{K}$ la matrice $B - \lambda I_3$ est inversible.

4.2 Cas général

Dans le cas général, on peut développer par rapport à une ligne ou une colonne afin de faire apparaître une relation de récurrence.

Exercice 4.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des scalaires. Calculer $\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

5 Déterminant d'une famille ou d'un endomorphisme dans une base donnée

Dans cette section, on appelle E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Définition 1. **Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

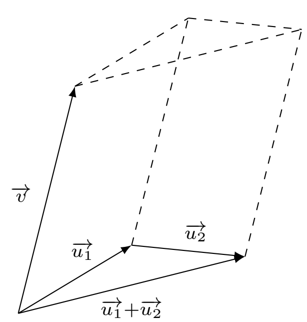
Soit $\mathcal{F}_n = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle **déterminant de $\mathcal{F}_n$ dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}_n)$ le déterminant de la matrice de la famille $\mathcal{F}_n$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 4.

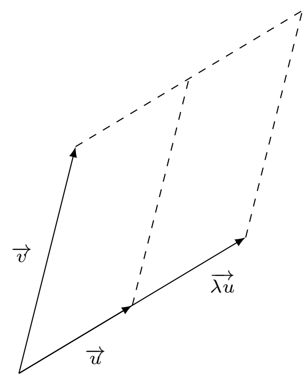
- ✗ De même que le déterminant d'une matrice rectangulaire n'est pas défini, dans un espace de dimension n on ne définit que le déterminant de n vecteurs.
  La famille dont on calcule le déterminant a donc nécessairement un cardinal égal à la dimension de l'espace dont les vecteurs sont éléments.

- ✗ Dans le cas où E est égal au plan ou a l'espace usuel (et donc $n = 2$ ou 3), si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe, cette définition coïncide avec celle du produit mixte. Dans le premier cas on obtient donc l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs, et dans le second le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs.

☞ Géométriquement le déterminant de n vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est égal au volume orienté du parallélépipède construit sur ces n vecteurs, la base choisie correspondant à l'unité de volume. Le déterminant permet donc de définir la notion de volume dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque. En effet, le dessin ci-dessous justifie que, dans le cas $n = 2$, l'aire $\mathcal{A}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ est bien linéaire à gauche. On justifierait de même que l'aire est linéaire à droite, et comme elle est orientée elle est clairement alternée.



$\mathcal{A}(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v})=\mathcal{A}(\overrightarrow{u_1},\mathrm{Vect}v)+\mathcal{A}(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v})$



$\mathcal{A}(\lambda\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\lambda\mathcal{A}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$

Proposition 5. **Base et déterminant**

i. Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de E est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$.

ii. Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de E est une base si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Remarque 5.
Si E est égal au plan ou a l'espace usuel, on en déduit que le produit mixte d'une famille de vecteurs est nul si et seulement si cette famille est liée, et ce même si la base n'est pas orthonormée directe.

Théorème & Définition 2. **Déterminant d'un endomorphisme**
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Toutes les matrices associées à f ont le même déterminant.
On appelle **déterminant de** f, et on note $\det(f)$, le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base.

Le résultat suivant montre notamment que le déterminant permet de caractériser les automorphismes.

Proposition 6.
Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les résultats suivants.

i. $\det(\lambda \cdot f) = \lambda^n \det(f)$;
ii. $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$;
iii. $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$;
iv. $f \in \mathrm{GL}(E) \Longrightarrow \det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Exercice 5.
Quelles sont les valeurs possibles du déterminant d'un projecteur? D'une symétrie?

6 Sélection d'exercices - Travaux dirigés

Exercice 6.
Parmi les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes, indiquez lesquelles sont des bases.

i. $B_1 = ((1,1,1), (-1,2,0), (2,-7,-1))$;
ii. $B_2 = ((1,2,-1), (1,-1,2), (2,1,-1))$;
iii. $B_3 = ((-x,1,1), (1,-x,1), (1,1,-x))$.

Exercice 7.

Donner une équation du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $v = (1, 1, 1)$ et $w = (-1, 0, 1)$.

Exercice 8.

Calculer les déterminants suivants (on en donnera une forme factorisée).

$$i. \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & c \\ c & c & c \end{vmatrix} \qquad ii. \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} \qquad iii. \begin{vmatrix} n! & (n-1)! & (n-2)! \\ (n-1)! & (n-2)! & (n-3)! \\ (n-2)! & (n-3)! & (n-4)! \end{vmatrix} \qquad iv. \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 9.

Calculer les déterminants d'ordre n (sauf *iii.* qui est d'ordre $2n$) suivants.

$$i.\ A_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad ii.\ B_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad iii. \mathbb{C}_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & b \\ & a & & 0 & & b & \\ & & \ddots & & \iddots & & \\ & 0 & & \ddots\ \iddots & & 0 & \\ & & \iddots & & \ddots & & \\ & b & & 0 & & a & \\ b & & & & & & a \end{vmatrix}_{[2n]}$$

$$iv.\ D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a+b & b & \ddots & \vdots \\ 0 & a & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & a & a+b \end{vmatrix} \qquad v.\ E_n = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & \cdots & x \\ y & z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & z & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix} \qquad vi.\ F_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ a & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Pour $v.$ on pourra calculer E_n pour $n = 2, 3, 4$ puis conjecturer une formule.

Exercice 10.

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et B la matrice telle que: pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne de B est la somme des colonnes de A d'indices différents de j. Exprimer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 11.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ij} \in [0, 1[$ et $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1$.

Montrer que $|\det A| < 1$.

Exercice 12.

Dans un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3, on considère les trois plans d'équations respectives $(1-m)x - 2y + z = 0$, $3x - (1+m)y - 2z = 0$ et $3x - 2y - (1+m)z = 0$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que ces trois plans aient au moins une droite en commun, et préciser alors leur intersection.

Exercice 13.

Dans le plan, on considère trois droites D_i d'équations respectives $(D_i) : a_i x + b_i y + c_i = 0$, pour $i \in [\![1, 3]\!]$.

Montrer que les trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.