X
Bonus : Exponentielle de Matrice

Introduction

L'objectif de cette fiche d'approfondissement, dont les résultats sont proposés sous forme d'exercices, est d'introduire la notion d'*exponentielle de matrice* ou plus généralement de suite de matrices convergente. Pour ce faire, il est nécessaire de préparer le terrain avec quelques rappels, compléments et résultats préliminaires.

En particulier, on **admet** le résultat ci-dessous (**Théorème 1**) dont on aura besoin, après l'introduction de la notion suivante.

Définition 1. **Suite de Cauchy**
Une suite $(a_k)_{k\geq}$ de nombres réels ou complexes est dite *de Cauchy* si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \kappa_0 \in \mathbb{N},\ \forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad (k \geq \kappa_0 \text{ et } \ell \geq \kappa_0) \Longrightarrow |a_k - a_\ell| < \varepsilon.$$

Théorème 1. **Complétude de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$**
Une suite réelle (ou complexe) est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

1 Préliminaires : une norme sous-multiplicative

Dans toute la suite, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on muni du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ défini par
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \langle A | B \rangle = \operatorname{Tr}(A^\top B),$$
et on note $\| \cdot \|$ la norme associée.

1. Vérifier que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\|A^\top\| = \|A\|$.

3. Montrer que :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

2 Suites et séries de matrices

Définition 2. **Convergence d'une suite ou d'une série de matrices**
On dit qu'une suite $(M_k)_{k\geq 0}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si
$$\lim_{k \to +\infty} \|M_k - M\| = 0.$$

La série $\sum M_k$ est dite convergente si la suite de matrices $(S_k)_{k\geq 0}$ définie par $S_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} M_j$, est convergente.

4. Montrer que, si $(M_k)_{k\geq 0}$ une suite de matrices convergente, alors la suite $(\|M_k\|)_{k\geq 0}$ est bornée.

5. Montrer que, si $(M_k)_{k\geq 0}$ et $(N_k)_{k\geq 0}$ sont deux suites de matrices convergentes respectivement vers M et N, alors, la suite de matrices $(M_kN_k)_{k\geq 0}$ converge vers MN.

6. Soient $(M_k)_{k\geq 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $m_{i,j}^{(k)}$ les coefficients et M une matrice dont les coefficients sont notés $m_{i,j}$.
Montrer que si $(M_k)_{k\geq 0}$ converge vers M, alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j}^{(k)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} m_{i,j}.$$

Ce résultat se reformule ; en cas de convergence d'une suite de matrices, il y a convergence *coefficient par coefficient*. En particulier, la limite est unique.

> **Définition 3.** **Suite de Cauchy**
> Une suite $(M_k)_{k\geq}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *de Cauchy* si
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \kappa_0 \in \mathbb{N},\ \forall k,\ell \in \mathbb{N},\quad (k \geq \kappa_0 \text{ et } \ell \geq \kappa_0) \Longrightarrow \|M_k - M_\ell\| < \varepsilon.$$

On **admet** le résultat suivant, analogue du **Théorème 1**.

> **Théorème 2.** **Complétude de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**
> Une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

> **Définition 4.** **Absolue convergence**
> On dit qu'une série $\sum M_k$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge absolument si la série *numérique* $\sum \|M_k\|$ converge.

7. Montrer que, si $\sum M_k$ converge absolument, alors $\sum M_k$ converge.

3 Exponentielle de matrice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixée. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, M_k la matrice définie par

$$M_k = \frac{1}{k!}A^k.$$

8. Montrer que la série $\sum M_k$ converge (absolument).

On note alors e^A la somme de la série ci-dessus. C'est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appelée **exponentielle de** A**.**

9. Vérifier que $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

10. Que vaut e^A si $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est diagonale ?
Que vaut en particulier $e^{\mathbb{0}_n}$? $e^{\lambda I_n}$ $(\lambda \in \mathbb{K})$?

11. Que vaut e^A lorsque A est diagonalisable ?

12. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.
b. Donner alors l'expression de la matrice e^A.

13. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 puis déterminer, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de A^k en fonction de k.

b. En déduire que : $e^A = I_3 + \dfrac{1}{3}\left(e^3 - 1\right) A$.

14. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer e^{A+B} ainsi que $e^A e^B$. Commenter.

15. Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. A est-elle diagonalisable ?
b. Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tA}.

16. Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec A.

a. Montrer que e^A et B commutent. *On montrera que* $\|Be^A - e^A B\| = 0$.

b. En déduire que e^A et e^B commutent.

17. Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commute avec A. Montrer que : $e^A e^B = e^{A+B}$.

18. Montrer que e^A est inversible et que $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

4 Une application : résolution d'un système différentiel

On s'intéresse ici aux systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordres 1 à coefficients constants, *i.e.* les systèmes du type

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \cdots + a_{1n} \cdot x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \cdots + a_{nn} \cdot x_n(t) \end{cases}$$

où les a_{ij} sont dans $\mathbb{K}$ et les inconnues x_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$ dérivables.
Si on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}),$$

alors le système précédent devient équivalent à l'équation

$$X'(t) = A \cdot X(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

où $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.

19. Montrer que l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{tA} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = Ae^{tA}$.

20. On considère, dans cette dernière question, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}, e^{tA}$.

b. Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ y' = 3y - z \\ z' = 2x + y + 3z \end{cases}$$