Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Mathématiques A

Lundi 28 Avril 2025
Énoncé

Exercice 1

Cet exercice comporte trois parties. Les **Parties 2 et 3** sont indépendantes et utilisent toutes les deux des résultats de la **Parties 1**.
On définit φ sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = \left(\left(X^2-1\right)P'\right)'$$

c'est-à-dire que $\varphi(P)$ est le polynôme dérivé du polynôme $\left(X^2-1\right)P'$.

Préliminaire

1. a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Calculer $\varphi\left(X^n\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pourra traiter séparément le cas $n=0$.

Partie 1 : Polynômes de Legendre

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n(X) = \left(X^2-1\right)^n \qquad \text{et} \qquad P_n(X) = U_n^{(n)}(X).$$

On rappelle que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $P^{(n)}$ la dérivée n-ème du polynôme P. On remarque que $U_0(X) = P_0(X) = 1$.

2. Calculer P_1 et P_2.
3. Déterminer le degré de U_n puis celui de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

a. Vérifier que :

$$\left(X^2-1\right)U_n' = 2nXU_n \qquad (E)$$

b. Rappeler la formule de Leibniz exprimant la dérivée p-ème d'un produit de deux polynômes, pour $p \in \mathbb{N}$.

c. En dérivant $n+1$ fois l'égalité (E), montrer que :

$$\varphi\left(P_n\right) = n(n+1)P_n.$$

On pourra utiliser cette égalité dans les parties suivantes.

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme induit

Dans cette question, on fixe un entier naturel non nul N.

5. Montrer que $\mathbb{R}_N[X]$ est stable par φ.

On note alors φ_N l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_N[X]$. Autrement dit

$$\varphi_N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] & \to & \mathbb{R}_N[X] \\ P & \mapsto & \varphi(P) \end{array}$$

6. Écrire la matrice M_N représentative de φ_N dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$. Quelle est la taille de cette matrice?

7. Déterminer les valeurs propres de φ_N. Cet endomorphisme est-il diagonalisable?
8. En utilisant la partie précédente, déterminer les sous-espaces propres de φ_N.
9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

Partie 3 : Etude d'un produit scalaire

Dans la suite on confond polynôme et fonction polynomiale et on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
On rappelle que les suites de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont été définies dans la **Partie 1**. Dans la suite, on pourra utiliser les résultats prouvés dans cette partie.
On cherche une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, (Q_0, \dots, Q_n)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

10. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

11. **a**. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2, \langle\varphi(P_n), P_m\rangle = \langle P_n, \varphi(P_m)\rangle$. On pourra effectuer une intégration par parties.
b. En déduire que $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m$.

12. Calcul de $\|P_n\|$. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner les racines de U_n ainsi que leur ordre de multiplicité.

b. Montrer que $\|P_n\|^2 = (-1)^n \left\langle U_n^{(2n)}, U_n\right\rangle$.

c. Calculer $U_n^{(2n)}$. On pourra commencer par calculer son degré.

d. On admet que

$$\int_{-1}^{1} U_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)^n \,\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Déduire des résultats précédents la valeur de $\|P_n\|$.

13. Donner une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution du problème introduit au début de cette partie.

Exercice 2

Cet exercice comporte quatre parties qui sont en grande partie indépendantes. Les notions et variables étudiées dans la **Partie 1** sont utilisées dans les parties suivantes.

Un groupe de $n \geqslant 3$ amis parie sur l'issue d'un match opposant deux équipes de rugby : l'équipe A et l'équipe B. On fait les hypothèses suivantes :

- ✗ Chaque équipe a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner le match.
- ✗ Le match n'est pas truqué : son issue est indépendante des paris des joueurs.
- ✗ Chaque joueur parie 1 euro.
- ✗ Chaque joueur effectue son pari indépendamment des autres joueurs.
- ✗ Un joueur est déclaré gagnant s'il a parié sur la bonne issue du match.
- ✗ L'ensemble des gagnants se partage équitablement la mise totale de n euros.
- ✗ S'il n'y a aucun gagnant, la mise totale de n euros est reversée au club de rugby local.

Dans l'ensemble de l'exercice, on appelle gain d'un joueur la somme qu'il reçoit à l'issue du match. Ce gain ne prend pas en compte la somme qui a été misée. Ainsi s'il y a $m \geqslant 1$ joueurs gagnants, le gain de chacun de ces joueurs est de $\frac{n}{m}$.

Partie 1 : calcul de l'espérance du gain pour un joueur

On numérote les joueurs de 1 à n et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

- ✗ Y_k la variable qui vaut 1 si le joueur k a gagné et 0 sinon,
- ✗ X_k le gain, en euros, du joueur k à l'issue du match.

Enfin, on note :

- ✗ $N = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ le nombre de gagnants,
- ✗ $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ la somme des gains, en euros, des joueurs.

On admet que Y_k, X_k, N et S sont des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Donner la loi de Y_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ ainsi que celle de N. On explicitera les probabilités associées à ces lois.
2. Expliquer pourquoi $S(\Omega) = \{0, n\}$ puis expliciter la loi de S et calculer $\mathrm{E}(S)$.
3. En déduire la valeur de $\mathbf{E}(X_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ (le calcul de la loi de X_k n'est pas nécessaire pour cette question).
4. Un nouvel ami arrive dans le groupe, les joueurs ont-ils intérêt à ce qu'il parie avec eux?

Partie 2 : étude de la variable X_k

On fixe $k \in [\![1, n]\!]$ et on étudie la variable X_k.

5. Déterminer $\mathbf{P}(X_k = 0)$.

6. **a**. Quelle est la loi conditionnelle de la variable $N - 1$ sachant l'événement $(Y_k = 1)$?

b. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On pourra utiliser les événements $\left(X_k = \frac{n}{i}\right), (Y_k = 1)$ et $(N = i)$.

7. Retrouver la valeur de $\mathrm{E}(X_k)$ calculée dans la partie précédente.

8. On considère un autre joueur $j \neq k$. Les variables X_j et X_k sont-elles indépendantes? n[h]

Partie 3 : le match retour (version 1)

Après ce premier pari, le groupe d'amis se retrouve et parie sur un nouveau match entre les deux équipes. On suppose que l'issue du deuxième match est indépendante de celle du premier. Chaque joueur parie alors son gain du premier match sur le second, c'est-à-dire que le joueur k parie X_k euros.
Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire S euros. On note :

- ✗ Z_k le gain du joueur k lors de ce deuxième pari,
- ✗ M le nombre de gagnants du deuxième pari,
- ✗ $T = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ la somme des gains du deuxième pari.

On admet que Z_k, M et T sont des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

9. **a**. Donner la valeur des probabilités $\mathbf{P}_{(S=0)}(T = 0)$ et $\mathbf{P}_{(S=n)}(T = 0)$.

b. En déduire que

$$\mathbf{P}(T = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T = n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2.$$

c. Calculer l'espérance et la variance de T.
d. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(S, T)$.

10. En utilisant la variable T, calculer la valeur de $\mathbf{E}(Z_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

11. Le joueur k a-t-il intérêt à parier sur ce deuxième match?

Partie 4 : le match retour (version 2)

Dans cette version, seuls les joueurs ayant gagné au premier match se retrouvent pour le deuxième. Ils misent alors 1 euro. On suppose toujours que l'issue du deuxième match est indépendante de celle du premier.
Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire N euros. On note :

- ✗ W_k le gain du joueur k lors de ce deuxième pari, en convenant que $W_k = 0$ pour les joueurs ayant perdu leur premier pari et ne participant donc pas au second.
- ✗ $U = \sum_{k=1}^{n} W_k$ la somme des gains du deuxième pari.

On admet que W_k et U sont des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

12. **a**. Donner le support de la variable aléatoire U.
b. Soit $(i, j) \in N(\Omega) \times U(\Omega), j \neq 0, i \neq 0$. Donner la valeur de $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = j)$. On pourra distinguer selon que $i = j$ ou non.
c. Donner la loi et l'espérance de U.

13. En déduire la valeur de $\mathbf{E}(W_k)$.

14. Le joueur k a-t-il intérêt à parier sur ce deuxième match ?

●