Mathématiques A

Solution

Voici une proposition de solution pour l'épreuve de Mathématiques A, de la session 2025. Afin de la rendre accessible au plus vite, elle n'a pas été relue...
En cas de coquille ou d'erreur (ou de toute autre suggestion) n'hesitez pas à envoyer vos remarques par e-mail.
Je ne suis auteur que de la solution du premier exercice ; celle du deuxième exercice est proposée par Tewfik Lahcene.

Exercice 1

Cet exercice comporte trois parties. Les **Parties 2 et 3** sont indépendantes et utilisent toutes les deux des résultats de la **Partie 1**.
On définit φ sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \varphi(P) = \left(\left(X^2-1\right)P'\right)'$$

c'est-à-dire que $\varphi(P)$ est le polynôme dérivé du polynôme $\left(X^2-1\right)P'$.

Préliminaire

1. a. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Solution. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. L'application $x \mapsto P'(x)$ est polynomiale. L'application $x \mapsto x^2-1$ est polynomiale (de degré 2). Par produit, l'application $x \mapsto (x^2-1)P'(x)$ est donc polynomiale. Par opération de dérivation, l'application $x \mapsto \varphi(P)(x)$ est bien polynomiale donc φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$. Montrons qu'elle est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'opération de dérivation, on a (pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P+\mu Q)(X) &= \left((X^2-1)(\lambda P+\mu Q)'(X)\right)' \\
&= \left((X^2-1)(\lambda P'+\mu Q')(X)\right)' = (X^2-1)'(\lambda P'(X)+\mu Q'(X)) + (X^2-1)(\lambda P''(X)+\mu Q''(X)) \\
&= \lambda\left((X^2-1)'P'(x)+(X^2-1)P''(X)\right)+\mu\left((X^2-1)'Q'(X)+(X^2-1)Q''(X)\right) \\
&= \lambda\left((X^2-1)P'(X)\right)'+\mu\left((X^2-1)Q'(X)\right)' = \lambda\varphi(P)(X)+\mu\varphi(Q)(X)
\end{aligned}$$

et φ est bien linéaire donc un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. □

b. Calculer $\varphi(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pourra traiter séparément le cas $n=0$.

Solution. Par définition, comme $1'=0$, on a immédiatement $\varphi(1)=0$ puis tout aussi immédiatement

$$\varphi(X) = (X^2-1)' = 2X$$

Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Observons que $\left(X^k\right)' = kX^{k-1}$ et $X \cdot X^{k-1} = X^k$. On a alors (pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned}
\varphi(X^k) &= ((X^2-1)kX^{k-1})' = 2kX\cdot X^{k-1}+(X^2-1)k(k-1)X^{k-2}(x) \\
&= 2kX^k - k(k-1)X^{k-2}+k(k-1)X^k \\
&= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}
\end{aligned}$$

Au final,

$$\varphi(X^n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n=0 \\ 2X, & \text{si } n=1 \\ n(n+1)X^n-n(n-1)X^{n-2}, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

□

Partie 1 : Polynômes de Legendre

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n(X) = \left(X^2 - 1\right)^n \quad \text{et} \quad P_n(X) = U_n^{(n)}(X).$$

On rappelle que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $P^{(n)}$ la dérivée n-ème du polynôme P. On remarque que $U_0(X) = P_0(X) = 1$.

2. Calculer P_1 et P_2.

Solution. On applique la définition. Pour $x \in \mathbb{R}$.
✗ Pour $k = 0$, on a $U_0(X) = 1$ et donc $P_0(X) = U_0^{(0)}(X) = 1$.
✗ Pour $k = 1$, on a $U_1(X) = X^2 - 1$ et donc $P_1(X) = U_1'(X) = 2X$.
✗ Pour $k = 2$, on a $U_2(X) = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et donc $P_2(X) = U_2''(X) = 12X^2 - 4$.

□

3. Déterminer le degré de U_n puis celui de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule du binôme donne :

$$U_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} X^{2j}$$

Le terme de plus haut degré de U_n est X^{2n}. Donc U_n est de degré $2n$.
Or $\left(X^{2n}\right)^{(n)} = 2n(2n-1)...(2n-n+1)X^{2n-n} = \frac{(2n)!}{n!}X^n$. On a bien que P_n est de degré n et on peut même préciser que son coefficient dominant vaut $\frac{(2n)!}{n!}$. □

4. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

a. Vérifier que :

$$\left(X^2 - 1\right) U_n' = 2nXU_n \qquad (E)$$

Solution. On a immédiatement et sans la moindre difficulté $U_n'(X) = 2nX(X^2-1)^{n-1} = 2kXU_{n-1}(X)$. □

b. Rappeler la formule de Leibniz exprimant la dérivée p-ème d'un produit de deux polynômes, pour $p \in \mathbb{N}$.

Solution. Soient Q et R deux polynômes. Alors la **Formule de Leibniz** affirme que:

$$(QR)^{(p)}(X) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} Q^{(j)}(X) R^{(p-j)}(X).$$

□

c. En dérivant $n+1$ fois l'égalité (E), montrer que :

$$\varphi\left(P_n\right) = n(n+1)P_n.$$

On pourra utiliser cette égalité dans les parties suivantes.

Solution. On commence par observer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad (X^2-1)^{(j)}(x) = \begin{cases} X^2 - 1, & \text{si } j = 0 \\ 2X, & \text{si } j = 1 \\ 2, & \text{si } j = 2 \\ 0, & \text{si } j \geq 3. \end{cases}, \qquad \text{et} \qquad U_n'^{(n+1-j)} = \begin{cases} U_n^{(n+2)} = P_n'', & \text{si } j = 0 \\ U_n^{(n+1)} = P_n', & \text{si } j = 1 \\ U_n^{(n)} = P_n, & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Il suit qu'en appliquant la formule de Leibniz à l'ordre $n+1$ à U_1U_n', on a d'une part, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left(U_1U_n'\right)^{(n+1)}(X) &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} U_1^{(j)}(x) U_n'^{(n+1-j)}(X) = \sum_{j=0}^{2} \binom{n+1}{j} U_1^{(j)}(X) U_n'^{(n+1-j)}(X) \\ &= (X^2-1)P_n''(X) + 2(n+1)XP_n'(X) + 2\frac{n(n+1)}{2}P_n(X) \\ &= (X^2-1)P_n''(x) + 2(n+1)XP_n'(X) + n(n+1)P_n(x). \end{aligned}$$

D'autre part, en observant que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad e_1^{(j)}(x) = \begin{cases} X, & \text{si } j = 0 \\ 1, & \text{si } j = 1 \\ 0, & \text{si } j \geq 2. \end{cases}, \qquad \text{et} \qquad U_n^{(n+1-j)} = \begin{cases} U_n^{(n+1)} = P_n', & \text{si } j = 0 \\ U_n^{(n)} = P_n, & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

et en appliquant maintenant Leibniz au membre de droite de la formule obtenue à la question précédente, on a

$$\begin{aligned} \left(U_1 U_n'\right)^{(n+1)}(X) &= 2\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} n e_1^{(j)}(X) U_n^{(n+1-j)}(X) = 2\sum_{j=0}^{1} \binom{n+1}{j} n e_1^{(j)}(X) U_n^{(n+1-j)}(X) \\ &= 2nXP_n'(X) + 2(n+1)nP_n(X). \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$2nXP_n'(X) + 2(n+1)nP_n(X) = (X^2-1)P_n''(X) + 2(n+1)XP_n'(X) + n(n+1)P_n(X)$$

ou encore

$$(X^2-1)P_n''(X) + 2XP_n'(X) - n(n+1)P_n(X) = 0 \iff \varphi(P_n) = n(n+1)P_n,$$

ce qu'on voulait ! □

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme induit

Dans cette question, on fixe un entier naturel non nul N.

5. Montrer que $\mathbb{R}_N[X]$ est stable par φ.

Solution. D'après les Questions **1.a.** et **1.b.**, φ est linéaire et

$$\varphi(1, X, ..., X^N) \subset \text{Vect}\left(\varphi(1), \varphi(X), ..., \varphi(X^N)\right) = \text{Vect}\left(0, 2X, ..., N(N+1)X^n - N(N_1)X^{N-2}\right) \subset \mathbb{R}_N[X]$$

et $\mathbb{R}_N[X]$ est bien stable par φ. □

On note alors φ_N l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_N[X]$. Autrement dit

$$\varphi_N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_N[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_N[X] \\ P & \longmapsto & \varphi(P) \end{array}$$

6. Écrire la matrice M_N représentative de φ_N dans la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$. Quelle est la taille de cette matrice?

Solution. D'après les calculs de la Question **1.b.**, on peut immédiatement écrire, en notant $\mathcal{B}_N = (1, X, ..., X^N)$ la base canonique de $\mathbb{R}_N[X]$,

$$M = \text{Mat}(\varphi_N, \mathcal{B}_N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \dots & \dots & \vdots \\ & & 0 & k(k+1) & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & N(N+1) \end{pmatrix}$$

qui est une matrice carrée de taille $N+1$.

□

7. Déterminer les valeurs propres de φ_N. Cet endomorphisme est-il diagonalisable?

Solution. La matrice ci-dessus étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. On en déduit que $\text{Sp}(\varphi_N) = \{k(k+1) : k \in [\![0, N]\!]\}$.
L'application $t \mapsto t(t+1)$ étant injective (sur $\mathbb{R}_+$), les valeurs propres sont toutes distinctes : un théorème du cours permet de conclure que φ_N est diagonalisable et que chaque sous-espace propre est de dimension 1. □

8. En utilisant la partie précédente, déterminer les sous-espaces propres de φ_N.

Solution. En reprenant la question précédente, chaque sous-espace propre est de dimension 1 et on connait, avec les polynômes P_k des vecteurs propres associés à chaque valeur propre ; en effet, comme, d'après la Question **4.c.**, $\varphi(P_n) = n(n+1)P_n$ pour tout n, chaque P_k est vecteur propre associé à $k(k+1)$ et donc, on peut écrire que

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \qquad E_{k(k+1)}(\varphi_N) = \text{Vect}(P_k).$$

□

9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de φ.

Solution. Il suit de ce qui précède que

$$\{k(k+1): \ k \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Sp}(\varphi)$$

mais on a *a priori*, seulement une inclusion... Il n'est pas difficile de montrer qu'il y a égalité. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$. Alors, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul tel que $\varphi(Q) = \lambda Q$. Or, il existe N tel que $Q \in R_N[X]$, ainsi $\varphi(Q) = \varphi_N(Q) = \lambda Q$ donc λ est une valeur propre de φ_N, donc il existe $k \in [\![0, N]\!]$ tel que $\lambda = k(k+1)$ donc on a bien l'inclusion réciproque. Au final, Il suit de ce qui précède que

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{k(k+1): \ k \in \mathbb{N}\}.$$

□

Partie 3 : Etude d'un produit scalaire

Dans la suite on confond polynôme et fonction polynomiale et on munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
On rappelle que les suites de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont été définies dans la **Partie 1**. Dans la suite, on pourra utiliser les résultats prouvés dans cette partie.
On cherche une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Q_0, \dots, Q_n)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

10. Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Solution. On vérifie les conditions du cours.

✗ **Symétrie.** Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors, par commutativité du produit de réels,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P\rangle$$

et l'application est bien symétrique.

✗ **Bilinéarité.** Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P + \mu R, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} (\lambda P + \mu R)(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (\lambda P(t) + \mu R(t))Q(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \lambda P(t)Q(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \mu R(t)Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} R(t)Q(t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda\langle P, Q\rangle + \mu\langle R, Q\rangle
\end{aligned}$$

Ainsi l'application est linéaire à gauche et comme elle est aussi symétrique, elle est linéaire à droite et donc bilinéaire.

✗ **Positivité.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $t \in [-1, 1]$, $P(t)^2 \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, $\langle P, P\rangle \geq 0$.

✗ **Définie-positivité.** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. L'application $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$. Ainsi,

$$\langle P, P\rangle = 0 \iff \int_{-1}^{1} P^2(t)\mathrm{d}t = 0 \iff \left(\forall t \in [-1, 1], \quad P(t)^2 = 0\right) \iff \left(\forall t \in [-1, 1], \quad P(t) = 0\right).$$

Or un polynôme avec une infinité de racines (tous les réels entre -1 et 1) est identiquement nul. On a bien

$$\langle P, P\rangle = 0 \iff P = 0$$

et l'application est définie-positive. C'est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

□

11. **a**. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\langle \varphi(P_n), P_m\rangle = \langle P_n, \varphi(P_m)\rangle$. On pourra effectuer une intégration par parties.

Solution. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Comme suggéré, on va procéder par intégrations par parties (IPP). Notons, pour f et g les fonctions polynomiales (donc de classe $\mathcal{C}^1$) définies sur $[-1, 1]$ par

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'(t) &=& ((t^2-1)P_n'(t))' \\ g(t) &=& P_m(t) \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} f(t) &=& ((t^2-1)P_n'(t)) \\ g'(t) &=& P_m'(t) \end{array}\right.$$

On a, par IPP (licite),

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(P_n), P_m\rangle &= \int_{-1}^{1} \varphi(P_n)(t)P_m(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} ((t^2-1)P_n'(t))'P_m(t)\\
&= \left[(t^2-1)P_n'(t)P_m(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(t^2-1)P_n'(t)P_m'(t)\mathrm{d}t\\
&= -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P_n'(t)P_m'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Cette expression étant symétrique en n et m (c'est à dire qu'on peut échanger les rôles de n et m et garder la même expression), on en déduit que $\langle \varphi(P_n), P_m\rangle = \langle \varphi(P_m), P_n\rangle = \langle P_n, \varphi(P_m)\rangle$.

□

b. En déduire que $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m$.

Solution. Soit $n \neq m$. Comme on sait que $\varphi(P_n) = n(n+1)P_n$ et $\varphi(P_m) = m(m+1)P_m$, il suit que

$$n(n+1)\langle P_n, P_m\rangle = \langle \varphi(P_n), P_m\rangle = \langle \varphi(P_m), P_n, \rangle = m(m+1)\langle P_n, P_m\rangle$$

ou encore

$$(n(n+1) - m(m+1))\,\langle P_n, P_m\rangle = 0.$$

Comme $n(n+1) - m(m+1) \neq 0$ (car $n \neq m$) on a forcément $\langle P_n, P_m\rangle = 0$: les polynomes (P_n) sont deux à deux orthogonaux pour ce produit scalaire.

□

12. Calcul de $\|P_n\|$. Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}$.

a. Donner les racines de U_n ainsi que leur ordre de multiplicité.

Solution. On rappelle que $U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$. Ainsi, U_n admet pour racines 1 et -1 qui ont chacune une multiplicité égale à n. □

b. Montrer que $\|P_n\|^2 = (-1)^n \left\langle U_n^{(2n)}, U_n\right\rangle$.

Solution. Soit n fixé. Commençons par montrer la chose suivante

$$\forall (k,\ell) \in [\![0, n-1]\!], \qquad \langle U_n^{(n+k)}, U_n^{(n-\ell)}\rangle = -\langle U_n^{(n+k+1)}, U_n^{(n-\ell-1)}\rangle.$$

En effet, une IPP donne immédiatement

$$\begin{aligned}
\langle U_n^{(n+k)}, U_n^{(n-\ell)}\rangle &= \int_{-1}^{1} U_n^{(n+k)}(t)U_n^{(n-\ell)}(t)\mathrm{d}t\\
&= \left[U_n^{(n+k+1)}(t)U_n^{(n-\ell)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} U_n^{(n+k+1)}(t)U_n^{(n\ell-1)}(t)\mathrm{d}t\\
&= -\int_{-1}^{1} U_n^{(n+k+1)}(t)U_n^{(n-\ell-1)}(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

car le crochet s'annule puisque, comme mentionné ci-avant, 1 et -1 sont racines de multiplicité n de U_n donc toujours racine de $U_n^{(n-\ell-1)}$ car $n-\ell-1 \in [\![0, n-1]\!]$. Il suit que

$$\begin{aligned}
\|P_n\|^2 &= \langle U_n^{(n)}, U_n^{(n)}\rangle = -\langle U_n^{(n+1)}, U_n^{(n-1)}\rangle\\
&= \langle U_n^{(n+2)}, U_n^{(n-2)}\rangle = \ldots = (-1)^k\langle U_n^{(n+k)}, U_n^{(n-k)}\rangle\\
&= (-1)^n\langle U_n^{(n+n)}, U_n^{(0)}\rangle = (-1)^n\langle U_n^{(2n)}, U_n\rangle
\end{aligned}$$

□

c. Calculer $U_n^{(2n)}$. On pourra commencer par calculer son degré.

Solution. Il suffit de dériver n fois P_n qui est de degré n donc $U_n^{(2n)}$ est de degré nul, seul le terme de plus haut degré de U_n garde une contribution dans $U_n^{(2n)} = P_n^{(n)}$. Comme on connait le coefficient dominant de P_n égal à $(2n)!/n!$, il reste : $P_n^{(n)}(X) = (2n)!$. □

d. On admet que

$$\int_{-1}^{1} U_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)^n \ \mathrm{d}t = (-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Déduire des résultats précédents la valeur de $\|P_n\|$.

Solution. D'après la Question **12.b.** et le résultat admis

$$\begin{aligned}\|P_n\|^2 &= (-1)^n \int_{-1}^{1} U_n^{(2n)}(t)U_n(t)\mathrm{d}t = (2n)!(-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \mathrm{d}t \\ &= (2n)!(-1)^n(-1)^n \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)}.\end{aligned}$$

On en déduite que

$$\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}2^n n!.$$

□

13. Donner une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution du problème introduit au début de cette partie.

Solution. On sait que la famille (P_n) est orthogonale pour le produit scalaire, il suffit de la normaliser pour obtenir une famille orthonormale. En posant

$$Q_n = \frac{1}{\|P_n\|}P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}P_n,$$

on a bien définit une suite (Q_n) solution du problème posé. □

Exercice 2

Cet exercice comporte quatre parties qui sont en grande partie indépendantes. Les notions et variables étudiées dans la **Partie 1** sont utilisées dans les parties suivantes.

Un groupe de $n \geqslant 3$ amis parie sur l'issue d'un match opposant deux équipes de rugby : l'équipe A et l'équipe B. On fait les hypothèses suivantes :

- ✗ Chaque équipe a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner le match.
- ✗ Le match n'est pas truqué : son issue est indépendante des paris des joueurs.
- ✗ Chaque joueur parie 1 euro.
- ✗ Chaque joueur effectue son pari indépendamment des autres joueurs.
- ✗ Un joueur est déclaré gagnant s'il a parié sur la bonne issue du match.
- ✗ L'ensemble des gagnants se partage équitablement la mise totale de n euros.
- ✗ S'il n'y a aucun gagnant, la mise totale de n euros est reversée au club de rugby local.

Dans l'ensemble de l'exercice, on appelle gain d'un joueur la somme qu'il reçoit à l'issue du match. Ce gain ne prend pas en compte la somme qui a été misée. Ainsi s'il y a $m \geqslant 1$ joueurs gagnants, le gain de chacun de ces joueurs est de $\frac{n}{m}$.

Partie 1 : calcul de l'espérance du gain pour un joueur

On numérote les joueurs de 1 à n et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note :

- ✗ Y_k la variable qui vaut 1 si le joueur k a gagné et 0 sinon,
- ✗ X_k le gain, en euros, du joueur k à l'issue du match.

Enfin, on note :

- ✗ $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ le nombre de gagnants,
- ✗ $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ la somme des gains, en euros, des joueurs.

On admet que Y_k, X_k, N et S sont des variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

1. Donner la loi de Y_k pour $k \in [\![1, n]\!]$ ainsi que celle de N. On explicitera les probabilités associées à ces lois.

Solution. Puisque la variable aléatoire Y_k vaut 1 si le joueur k a gagné et 0 sinon et que ce joueur a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$, c-à-d. $Y_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainsi, la loi de probabilité de Y_k est donnée par :

$$\mathbf{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(Y_k = 0) = \frac{1}{2}.$$

La variable aléatoire $N = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ représente le nombre de gagnants parmi les n joueurs. Les paris des joueurs étant indépendants, N est alors la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, de paramètre $1/2$, ainsi N suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$, c-à-d. $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et sa loi de probabilité est donnée par :

$$\mathbf{P}(N = j) = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{pour } j \in [\![0, n]\!]$$

□

2. Expliquer pourquoi $S(\Omega) = \{0, n\}$ puis expliciter la loi de S et calculer $\mathrm{E}(S)$.

Solution. Si aucun joueur ne gagne, alors $S = 0$. Si au moins l'un des joueurs est gagnant alors la mise totale est remportée, donc $S = n$. Ainsi, S prend les valeurs 0 et n, et :

$$\mathbf{P}(S = 0) = \mathbf{P}(N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \mathbf{P}(S = n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On en déduit que l'espérance de S est :

$$\mathbf{E}(S) = 0 \cdot \mathbf{P}(S = 0) + n \cdot \mathbf{P}(S = n) = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

□

3. En déduire la valeur de $\mathbf{E}(X_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ (le calcul de la loi de X_k n'est pas nécessaire pour cette question).

Solution. Par linéarité de l'espérance, on a : $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k)$. Étant dans une situation symétrique, tous les joueurs ont même espérance μ de gain, ainsi : $\mathbf{E}(X_k) = \mu$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et, d'après la question précédente : $n\mu = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. On en déduit, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbf{E}(X_k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

□

4. Un nouvel ami arrive dans le groupe, les joueurs ont-ils intérêt à ce qu'il parie avec eux?

Solution. Si un nouvel ami arrive dans le groupe, le gain espéré pour chaque joueur du nouveau groupe est : $\mu = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, cette espérance croit avec n; donc le groupe a tout intérêt à faire participer le nouveau venu au pari. □

Partie 2 : étude de la variable X_k

On fixe $k \in [\![1, n]\!]$ et on étudie la variable X_k.

5. Déterminer $\mathbf{P}(X_k = 0)$.

Solution. La variable X_k vaut 0 si et seulement si le joueur k ne fait pas partie des gagnants, soit si et seulement si $Y_k = 0$. Ainsi :

$$\mathbf{P}(X_k = 0) = \mathbf{P}(Y_k = 0) = \frac{1}{2}$$

□

6. **a**. Quelle est la loi conditionnelle de la variable $N - 1$ sachant l'événement $(Y_k = 1)$?

Solution. Si l'événement $(Y_k = 1)$ est réalisé (le joueur k est gagnant), les $N - 1$ autres gagnants sont à choisir parmi les $n - 1$ autres joueurs, ainsi la loi conditionnelle de $N - 1$ sachant $(Y_k = 1)$ est une loi binomiale de paramètres $n - 1$ et $\frac{1}{2}$. On en déduit, pour $i \in [\![0, n - 1]\!]$,

$$\mathbf{P}_{(Y_k=1)}(N - 1 = i) = \binom{n-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-i} = \binom{n-1}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

□

b. En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

On pourra utiliser les événements $\left(X_k = \frac{n}{i}\right), (Y_k = 1)$ et $(N = i)$.

Solution. L'événement $\left(X_k = \frac{n}{i}\right)$ est réalisé si et seulement si le joueur k a gagné $(Y_k = 1)$ et qu'il y a exactement i gagnants au total $(N = i)$; ainsi : $\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = (Y_k = 1 \cap N = i)$. Utilisant la définition de la probabilité conditionnelle, on obtient, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(Y_k = 1 \cap N = i\right) &= \mathbf{P}_{(Y_k=1)}(N = i)\mathbf{P}(Y_k = 1)\\ &= \mathbf{P}_{(Y_k=1)}(N - 1 = i - 1)\mathbf{P}(Y_k = 1)\\ &= \binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\mathbf{P}(Y_k = 1)\\ &= \binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

□

7. Retrouver la valeur de $\mathrm{E}\left(X_k\right)$ calculée dans la partie précédente.

Solution. La loi de X_k étant connue, on a, compte de la relation $\binom{n}{i} = \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ et de la formule du binôme de Newton:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_k) = \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i} = \left(\frac{1}{2}\right)^n\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} - 1\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n(2^n - 1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,\end{aligned}$$

valeur déjà obtenue à la partie 1. □

8. On considère un autre joueur $j \neq k$. Les variables X_j et X_k sont-elles indépendantes?

Solution. Si j et k sont distincts, les variables X_j et X_k ne sont pas indépendantes. En effet, Il suffit de remarquer que les événements $(X_j = n)$ et $(X_k = n)$ sont incompatibles (car $(X_j = n)$ signifie que le joueur j est le seul gagnant), de sorte que $\mathbf{P}(X_k = n \cap X_j = n) = 0$ mais que, par ailleurs,

$$\mathbf{P}(X_k = n)\mathbf{P}(X_j = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \neq 0 = \mathbf{P}(X_k = n \cap X_j = n)$$

□

Partie 3 : le match retour (version 1)

Après ce premier pari, le groupe d'amis se retrouve et parie sur un nouveau match entre les deux équipes. On suppose que l'issue du deuxième match est indépendante de celle du premier. Chaque joueur parie alors son gain du premier match sur le second, c'est-à-dire que le joueur k parie X_k euros.
Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire S euros. On note :

- ✗ Z_k le gain du joueur k lors de ce deuxième pari,
- ✗ M le nombre de gagnants du deuxième pari,
- ✗ $T = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ la somme des gains du deuxième pari.

On admet que Z_k, M et T sont des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

9. a. Donner la valeur des probabilités $\mathbf{P}_{(S=0)}(T = 0)$ et $\mathbf{P}_{(S=n)}(T = 0)$.

Solution. Si $S=0$, alors aucun joueur n'a gagné au premier pari et tous les X_k son nuls. Ainsi la somme misée dans le second pari est nulle, c-à-d. que

$$\mathbf{P}_{(S=0)}(T=0)=1$$

Si $S=n$, alors on mise n euros lors de cette second manche et, toujours par indépendance des paris,

$$\mathbf{P}_{(S=n)}(T=0)=\mathbf{P}(M=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

□

b. En déduire que

$$\mathbf{P}(T=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T=n)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2.$$

Solution. La formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $((S=0),(S=n))$, donne :

$$\mathbf{P}(T=0)=\mathbf{P}(S=0)\mathbf{P}_{(S=0)}(T=0)+\mathbf{P}(S=n)\mathbf{P}_{(S=n)}(T=0),$$

soit :

$$\mathbf{P}(T=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

On en déduit que :

$$\mathbf{P}(T=n)=1-\mathbf{P}(T=0)=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2.$$

□

c. Calculer l'espérance et la variance de T.

Solution. En observant que T/n suit une loi Bernoulli de paramètre $p=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$, on conclut que l'espérance de T est :

$$\mathbf{E}(T)=n\mathbf{E}\left(\frac{T}{n}\right)=np$$

et sa variance est :

$$\mathbf{V}(T)=n^2\mathbf{V}\left(\frac{T}{n}\right)=n^2p(1-p).$$

□

d. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(S,T)$.

Solution. La covariance demandée est $\mathbf{Cov}(S,T)=\mathbf{E}(ST)-\mathbf{E}(S)\mathbf{E}(T)$. Il faut alors calculer $\mathbf{E}(ST)$. Remarquons que $ST\in\{0,n^2\}$ et que $(ST=n^2)=(S=n)\cap(T=n)$ de sorte que :

$$\mathbf{E}(ST)=n^2\mathbf{P}(ST=n^2)=n^2\mathbf{P}\left((S=n)\cap(T=n)\right)=n^2\mathbf{P}_{(S=n)}(T=n)\mathbf{P}(S=n)=n^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$$

De ce dernier résultat, on déduit

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(S,T)&=n^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2-\left(n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)\left(n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2\right)\\&=n^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2\left(1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)\\&=n^2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

□

10. En utilisant la variable T, calculer la valeur de $\mathbf{E}(Z_k)$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.

Solution. Toujours par symétrie de la situation et par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(T)=\sum_{i=1}^n\mathbf{E}(Z_i)=n\mathbf{E}(Z_i)$. Donc, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\mathbf{E}(Z_k)=\frac{\mathbf{E}(T)}{n}=\frac{n\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2}{n}=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$$

□

11. Le joueur k a-t-il intérêt à parier sur ce deuxième match?

Solution. Puisque pour tout $x \in]0,1[, x^2 < x$, on a :

$$\mathbf{E}(Z_k) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = \mathbf{E}(X_k),$$

donc le joueur k n'a pas intérêt à parier sur ce deuxième match. □

Partie 4 : le match retour (version 2)

Dans cette version, seuls les joueurs ayant gagné au premier match se retrouvent pour le deuxième. Ils misent alors 1 euro. On suppose toujours que l'issue du deuxième match est indépendante de celle du premier.
Les gagnants se partagent alors équitablement la mise totale, c'est-à-dire N euros. On note :

- ✗ W_k le gain du joueur k lors de ce deuxième pari, en convenant que $W_k = 0$ pour les joueurs ayant perdu leur premier pari et ne participant donc pas au second.
- ✗ $U = \sum_{k=1}^{n} W_k$ la somme des gains du deuxième pari.

On admet que W_k et U sont des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

12. **a.** Donner le support de la variable aléatoire U.

Solution. Par support de U, on entend les valeurs prises par U. Le nombre de participants à cette seconde manche est N, qui peut prendre les valeurs $0, 1, \ldots, n$. Si $N = 0$, alors $U = 0$. Si $N \geqslant 1$, alors U peut être 0, si aucun des N joueurs ne gagne au deuxième match ou N, si au moins l'un de ces joueurs gagne au deuxième match. Ainsi, le support de U est $\mathrm{Im}(U) = U(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. □

b. Soit $(i, j) \in N(\Omega) \times U(\Omega), j \neq 0, i \neq 0$. Donner la valeur de $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = j)$. On pourra distinguer selon que $i = j$ ou non.

Solution. Soit $(i, j) \in N(\Omega) \times U(\Omega)$ tel que $i \neq 0$ et $j \neq 0$. Si $N = i$, alors la somme mise en jeu vaut i et le gain possible après le match est soit nul soit égal à i. On en déduit que :

$$\mathbf{P}_{(N=i)}(U = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^i & \text{si } i = j \end{cases}$$

□

c. Donner la loi et l'espérance de U.

Solution. Par la formule des probabilités totales, appliquée avec le système complet d'événements $(N = i)_{i=0}^{n}$, on a, compte tenu du résultat de la question précédente, pour $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbf{P}(U = j) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_{(N=i)}(U = j)\mathbf{P}(N = i) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)\mathbf{P}(N = j) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(U = 0) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}_{(N=i)}(U = 0)\mathbf{P}(N = i) \\
&= \mathbf{P}_{(N=0)}(U = 0)\mathbf{P}(N = 0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_{(N=i)}(U = 0)\mathbf{P}(N = i) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

(on a utilisé dans le dernier calcul le fait que $\mathbf{P}_{(N=0)}(U = 0) = 1$ ainsi que la formule du binôme de Newton). On en déduit alors :

$$\mathbf{E}(U) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbf{P}(U = j) = \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)$$

Il sans doute attendu une simplification de la formule obtenue, ce qui se fait par l'emploi de la formule du binôme de Newton. On a :

$$\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)=\sum_{j=1}^{n} j\,\frac{n}{j}\binom{n-1}{j-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)=n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)$$

En posant $k=j-1$, dans la somme précédente, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Les deux dernières sommes valent, d'après la formule du binôme, respectivement 2^{n-1} et $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$. Ce qui en définitive donne:

$$\mathbf{E}(U)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n} n\left(2^{n-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)$$

□

13. En déduire la valeur de $\mathbf{E}\left(W_k\right)$.

Solution. Comme plus haut, par symétrie de la situation, on a, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$,

$$\mathbf{E}(W_k)=\frac{\mathbf{E}(U)}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

□

14. Le joueur k a-t-il intérêt à parier sur ce deuxième match ?

Solution. Il s'agit de comparer

$$\mathbf{E}(X_k)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\quad\text{et}\quad\mathbf{E}(W_k)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

en observant que $\mathbf{E}(W_k)<\frac{1}{2}$ alors que $E(X_k)>\frac{1}{2}$, on conclut que le joueur k n'a pas intérêt à parier sur ce deuxième match. □