Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

BANQUE PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

Mathématiques B

Solution

Voici une proposition de solution pour l'épreuve de Mathématiques B, de la session 2025. Afin de la rendre accessible au plus vite, elle n'a pas été relue...
En cas de coquille ou d'erreur (ou de toute autre suggestion) n'hesitez pas à envoyer vos remarques par e-mail.
Je ne suis auteur que de la solution du premier exercice ; tout le reste est proposée par le génialissime Tewfik Lahcene que je remercie grandement.

Exercice 1

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$2xy\sqrt{3} - 2y^2 = 3.$$

1. Écrire la matrice Q associée à l'équation de la conique $\mathcal{C}$.

Solution. La matrice associée à (la partie quadratique de) l'équation de la conique est la matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$. □

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.

Solution. On calcule rapidement le polynôme caractéristique de Q :

$$\chi_Q(X) = \det(XI_2 - Q) = X(X+2) - 3 = X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3),$$

ce qui nous permet d'affirmer que $\mathrm{Sp}(Q) = \{-3, 1\}$. On détermine alors le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres ci-dessus :

✗ Pour $\lambda = 1$, on a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(Q) \iff (Q - I_2)X = 0 \iff \begin{cases} x - \sqrt{3}y & = 0 \\ -\sqrt{3}x + 3y & = 0 \end{cases}$$
$$\iff y = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

ce qui donne

$$E_1(Q) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right).$$

✗ Pour $\lambda = -3$, on pourrait résoudre un système analogue. On peut aussi remarquer que, la matrice Q étant symétrique, ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Ainsi, le sous-espace propre associé à -3 sera engendré par un vecteur orthogonal à celui qui engendre $E_1(Q)$. On peut donc sans le moindre calcul supplémentaire écrire

$$E_{-3}(Q) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

□

3. Donner une équation réduite de $\mathcal{C}$ ainsi qu'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}'$ dans lequel cette équation est obtenue.

Solution. Notons $\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$. D'après, ce qui précède, $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de Q. Notant P la matrice de passage (orthogonale donc) de la base canonique vers la base $(\vec{u}, \vec{v})$, on peut écrire

$$Q = P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}P^\top.$$

Si l'on pose alors $Y = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = P^\top X$, on peut alors observer que

$$\begin{aligned}(x, y) \in \mathcal{C} \quad &\iff \quad 2xy\sqrt{3} - 2y^2 = 3 \iff X^\top QX = 3\\ &\iff \quad X^\top P\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}P^\top X = 3\\ &\iff \quad Y^\top\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{pmatrix}Y = 3 \iff x'^2 - 3y'^2 = 3\\ &\iff \quad \frac{x'^2}{3} - y'^2 = 1.\end{aligned}$$

En notant $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}, \vec{v})$ le repère demandé, l'équation réduite de $\mathcal{C}$ dans ce repère est $\frac{x'^2}{3} - y'^2 = 1$. □

4. Donner la nature de $\mathcal{C}$.

Solution. D'après l'équation réduite de $\mathcal{C}$ obtenue à la question précédente, on peut affirmer qu'on a reconnu une hyperbole. □

5. Déterminer les principaux éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$ (centre éventuel, sommets, asymptotes éventuelles). Les coordonnées des points et les équations des éventuelles asymptotes seront données dans le repère $\mathcal{R}'$ puis dans le repère $\mathcal{R}$.

Solution. Précisons les choses pour chaque élément demandé :

- ✗ Le centre de l'hyperbole est le centre du repère réduit $\mathcal{R}'$ qui est l'origine du repère initial. Ce dernier a pour coordonnées $(0, 0)$ et ceci, dans les deux repères.

- ✗ Les deux sommets S et S' de l'hyperbole on pour coordonnées respectives dans $\mathcal{R}'$ $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ et $\left(\sqrt{3}, 0\right)$, ce qui veut dire

$$\overrightarrow{OS} = -\sqrt{3}\vec{u} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3\\\sqrt{3}\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$$

  et S a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans $\mathcal{R}$. De la même manière, S' a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans $\mathcal{R}$.

- ✗ Les deux asymptotes ont pour équation $y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}x'$ et $y' = \frac{1}{\sqrt{3}}x'$ dans le repère $\mathcal{R}'$. Il s'agit des droites passant par O et dirigées respectivement par les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{R}'$) et $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ (toujours dans $\mathcal{R}'$). Ces deux vecteurs directeurs ont pour coordonnées

$$P\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}3 & -\sqrt{3}\\\sqrt{3} & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

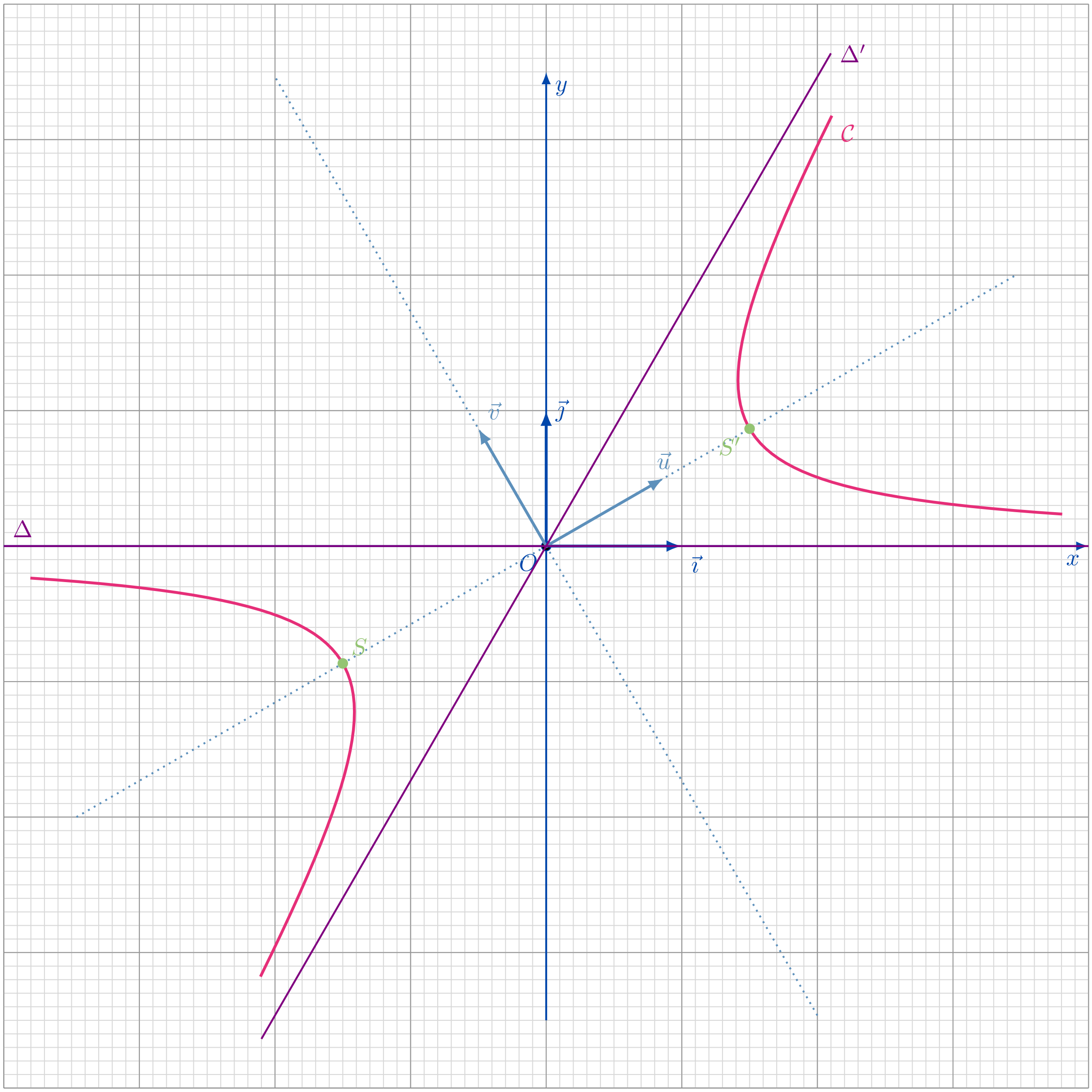
  Par conséquent, dans le repère $\mathcal{R}$, les deux asymptotes (que l'on note Δ et Δ') ont pour équation

$$y = 0, \qquad \text{et} \qquad y = \sqrt{3}x.$$

□

6. Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}$ sur la feuille de papier millimétrée fournie.
*On mettra en évidence le repère $\mathcal{R}'$ ainsi que les éléments déterminés dans la Question **5**. Unité : 2 cm.*

Solution. On fait le dessin demandé : les éléments caractéristiques cités dans la question précédente permettent le tracé.



Remarque. On ne résiste pas à donner une paramétrisation de la conique (c'est d'ailleurs ce qui a permis le tracé programmé ci-dessous). Dans le repère $\mathcal{R}'$, une paramétrisation (de chaque branche) est donnée par

$$t \longmapsto \begin{cases} \pm\sqrt{3}\mathrm{ch}(t) \\ \mathrm{sh}(t) \end{cases}$$

Il suit que dans le repère initial, une paramétrisation est

$$t \longmapsto P\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3}\mathrm{ch}(t) \\ \mathrm{sh}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{3}\mathrm{ch}(t) \\ \mathrm{sh}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3}\left(\pm 3\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t)\right) \\ 3\left(\pm\mathrm{ch}(t) + \mathrm{sh}(t)\right) \end{pmatrix}.$$

□

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de résoudre sur $]1;+\infty[$, l'équation différentielle

$$(3x+1)y + (2-x)y' - \frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)y'' = 3\left(x^2+x+1\right). \qquad (E)$$

On note (E_H) l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$(3x+1)y + (2-x)y' - \frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)y'' = 0. \qquad (E_H)$$

On désigne par S l'ensemble des solutions réelles de (E) sur $]1;+\infty[$ et par S_H l'ensemble des solutions réelles de (E_H) sur $]1;+\infty[$.

Partie I

1. Démontrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $3x^2+2x-2 \neq 0$.

Solution. Pour tout $x \in]1;+\infty[$, on a $3x^2+2x-2 = 3x^2+2(x-1) > 3$ ce qui conclut. □

2. Démontrer que S_H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble D_2 des fonctions deux fois dérivables sur $]1;+\infty[$.

Solution. La fonction nulle est dans S_H et si f et g sont dans S_H et λ est un réel alors, par les propriétés des fonctions deux fois dérivables et par la linéarité de la dérivation, on a pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\begin{aligned}(3x+1)(\lambda f+g)(x)+(2-x)(\lambda f+g)'(x)-\frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)(\lambda f+g)''(x)\\ =\lambda\Big((3x+1)f(x)+(2-x)f'(x)-\frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)f''(x)\Big)\\ +\Big((3x+1)g(x)+(2-x)g'(x)-\frac{x}{2}\left(3x^2+2x-2\right)g''(x)\Big)=0\end{aligned}$$

car f et g sont dans S_H. Tout ceci prouve que S_H est non vide et stable par combinaisons linéaires; c'est donc un sous-espace vectoriel de D_2.

□

3. Donner, sans démonstration, la dimension de S_H.

Solution. Comme (E_H) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients continues, et que $x \mapsto x^2-2x+3$ ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$, l'espace S_H est de dimension 2. □

4. Démontrer que la fonction f_1 définie sur $]1;+\infty[$ par $\forall x \in]1;+\infty$, $f_1(x)=\frac{1}{x}$ est solution de (E_H) sur $]1;+\infty[$.

Solution. Soit $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$. On a $f_1' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ et $f_1'' : x \mapsto \frac{2}{x^3}$. En reportant dans (E_H), on obtient pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$(3x+1)\frac{1}{x}+(2-x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-\frac{x}{2}(3x^2+2x-2)\frac{2}{x^3}=0,$$

ce qui prouve que f_1 est dans S_H. □

Partie II

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&6\\0&3&-3\end{pmatrix}$.

L'espace vectoriel R^3 est muni de sa base canonique.

5. La matrice A est-elle inversible?

Solution. On applique la méthode de Gauss-Jordan pour trouver le rang de A ; les operations sur les lignes préservent le rang. On a:

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&6\\0&3&-3\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-6&6\\0&3&-3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&3&-3\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=2.\end{aligned}$$

Ainsi A est de rang 2 et n'est donc pas inversible. □

6. Déterminer le noyau de A.

Solution. Pour déterminer le noyau (qui est, d'après le théorème du rang, de dimension 1), on résout l'équation $AX=0$. On a :

$$\begin{cases}x+2y=0\\3x+6z=0\\3y-3z=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-2y\\y=z\end{cases} \iff X=\begin{pmatrix}-2y\\y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

Donc le noyau de A est : $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$. □

7. Démontrer que l'image de A est le plan d'équation $3x=y+2z$.

Solution. L'image de A est de dimension 2 (puisque le rang de A est 2), $\mathrm{Im}(A)$ est engendré par ses deux premières colonnes, puisqu'elles ne sont pas proportionnes. On donc :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A) &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \\ &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = 3\lambda_1 \\ z = 3\lambda_2 \end{cases}\end{aligned}$$

Ce dernier système est compatible si et seulement si $3x = y + 2z$. Cette dernière équation est, comme demandé, une équation du plan $\mathrm{Im}(A)$. □

8. Sans résoudre les systèmes, déterminer à l'aide des questions précédentes quel est le nombre de solutions (éventuellement infini) de :

$$\mathcal{S}_1 : AX = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : AX = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Le système $\mathcal{S}_1$ a une solution si et seulement si le second membre est dans l'image de A.

- ✗ Comme ce n'est pas le cas ($3 \times 3 \neq -1 + 4 = 3$), $\mathcal{S}_1$ n'a pas de solution.
- ✗ Tandis que pour $\mathcal{S}_2$, le second membre est dans l'image de A. Donc $\mathcal{S}_2$ a une infinité de solutions : en effet toute solution à laquelle on ajoute un élément du noyau de A est encore solution.

□

9. Résoudre le système $\mathcal{S}_2 : AX = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution. On résout $\mathcal{S}_2$. On a, en retranchant à la deuxième équation 3 fois la première :

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6z = 3 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -6y + 6z = -6 \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y + z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 2z \\ z + 1 \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R},$$

résultat qui confirme le caractère infini de l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}_2$. □

Partie III

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2 est noté $\mathbb{R}_2[X]$ et sa base canonique est $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P) = (3X + 1)P + (2 - X)P' - \frac{X}{2}\left(3X^2 + 2X - 2\right) P''.$$

10. Calculer $\varphi(1), \varphi(X), \varphi\left(X^2\right)$.

Solution. On calcule :

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 3X + 1 \\ \varphi(X) &= (3X + 1)X + (2 - X) = 3X^2 + 2 \\ \varphi(X^2) &= (3X + 1)X^2 + (2 - X)(2X) - \frac{X}{2}(3X^2 + 2X - 2)2 = -3X^2 + 6X \end{aligned}$$

□

11. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution.

✗ Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P+Q) &= (3X+1)(\lambda P+Q)+(2-X)(\lambda P'+Q')-\frac{X}{2}(3X^2+2X-2)(\lambda P''+Q'') \\
&= \lambda[(3X+1)P+(2-X)P'-\frac{X}{2}(3X^2+2X-2)P''] \\
&+ [(3X+1)Q+(2-X)Q'-\frac{X}{2}(3X^2+2X-2)Q''] \\
&= \lambda\varphi(P)+\varphi(Q).
\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

✗ D'après la question précédente $\varphi(1)$, $\varphi(X)$ et $\varphi\left(X^2\right)$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$. Comme tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, il en résulte, par linéarité de φ, que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

□

12. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution. D'après la Question **10.**, la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est (sans surprise) la matrice A. □

13. En déduire, sans calcul, le noyau de φ ainsi qu'une solution de l'équation

$$\varphi(P) = 3\left(X^2+X+1\right).$$

Solution. Soit $P = a+bX+cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$P \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A).$$

Ainsi, d'après la **Partie II**, le noyau de φ est $\operatorname{Vect}(-2+X+X^2)$.

Les cordonnés dans $\mathcal{B}$ de $Q(X) = X^2+X+1$ sont $(1,1,1)$; ainsi, toujours d'après la **Partie II**, une solution de $\varphi(P) = 3Q$ est $P(X) = 1+X$. □

Partie IV

14. Déterminer S_H puis S.

Solution. D'après la **Partie I**, f_1 est de solution de E_H et, d'après la **Partie III** $f_2 : x \mapsto x^2-x-2$ est également dans S_H.

Les fonctions f_1 et f_2 sont non proportionnelles (le rapport n'est pas constant), donc la famille (f_1, f_2) est une famille libre de S_H. Comme cette famille possède deux éléments et que S_H est de dimension 2, c'est une base de S_H; en conclusion $S_H = \operatorname{Vect}(f_1, f_2)$.

Par ailleurs, d'après la Question **13.**, $f_3 : x \mapsto 1+x$ est un élément de S. On en déduit, avec un résultat du cours, que :

$$S = \{\alpha f_1+\beta f_2+f_3,\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

□

Exercice 3

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie I

On considère la surface S d'équation cartésienne : $x^2 = 2yz$.

On note Γ la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \sin(t) \end{cases}, \quad t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

De plus, $M(t)$ désigne le point de Γ de paramètre t.

Enfin, P_a est le plan d'équation $z = a$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_a = S \cap P_a$.

1. (a) Justifier que le plan d'équation $x = 0$ est un plan de symétrie de la surface S.

Solution. Le plan d'équation $x = 0$ est un plan de symétrie de S car si le point $M(x, y, z) \in S$, alors son image par la symétrie par rapport à ce plan est le point $M(-x, y, z)$ qui est dans S puisque $(-x)^2 = x^2 = 2yz$. □

(b) Déterminer les points non réguliers de S.

Solution. La fonction F définie sur $\mathbb{R}^3$ par $F(x, y, z) = x^2 - 2yz$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et la surface S est définie par l'équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$. En un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le gradient de F est :

$$\nabla F(x, y, z) = 2\begin{pmatrix} x \\ -z \\ -y \end{pmatrix}.$$

Celui-ci est nul si et seulement si $x = -z = -y = 0$; donc le seul point non régulier de S est le point $O = (0, 0, 0)$. □

(c) Déterminer une équation du plan tangent à S au point A de coordonnées $(2, -2, -1)$ après avoir vérifié que $A \in S$.

Solution. Le point $A(2, -2, -1) \in S$ car $x^2 = 4$ et $2yz = 2 \times (-2) \times (-1) = 4$ donc $x^2 = 2yz$.

Le gradient de F en A est $\nabla F(A) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On obtient une équation du plan tangent à S en A, noté $\mathcal{T}_A(S)$, en écrivant :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{T}_A(S) \iff \overrightarrow{AM} \perp \nabla F(A),$$

ce qui donne l'équation suivante pour $\mathcal{T}_A(S)$:

$$2x + y + 2z = 0.$$

□

(d) Démontrer que l'ensemble des points (réguliers) de S en lesquels le plan tangent à S est parallèle au plan d'équation $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ est une droite privée de O dont on donnera un vecteur directeur.

Solution. Un vecteur normal au plan Π d'équation $2\sqrt{3}x + 2y + 3z = 0$ est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. En un point $M(x, y, z)$ régulier de S, le plan tangent est parallèle au plan Π si et seulement si $\nabla F(M)$ est colinéaire à $\vec{n}$, soit si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ($\lambda = 0$ est exclu car il conduit au point singulier O) tel que :

$$\nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2z \\ -2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ou encore, si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\begin{cases} x = \lambda\sqrt{3} \\ z = -\lambda \\ y = -\frac{3}{2}\lambda \end{cases}.$$

Le points obtenus forment bien une droite D privée de O. Réciproquement, à l'exclusion du point O, tout point de cette droite est dans S car $(\lambda\sqrt{3})^2 = 2\left(-\frac{3}{2}\lambda\right)(-\lambda)$ et le plan tangent en un tel point est bien orthogonal à $\vec{n}$.

En conclusion, les points recherchés sont de la forme :

$$\left(\lambda\sqrt{3}, -\tfrac{3}{2}\lambda, -\lambda\right) \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^*$$

et forment la droite D, dirigé par le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, et privée de O. $\square$

(e) Existe-t-il un point régulier de S en lequel le plan tangent à S est orthogonal au vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$?

Solution. En un point $M(x, y, z)$ régulier de S, le plan tangent est orthogonal au vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\nabla F(x, y, z)$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *i.e.* si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $(2x, -2z, -2y) = \lambda(1, 1, 1)$ ce qui donne $2x = \lambda$, $-2z = \lambda$ et $-2y = \lambda$ puis $x = \frac{\lambda}{2}$, $y = z = -\frac{\lambda}{2}$. Le point M devant être dans S, on doit avoir :

$$x^2 = \frac{\lambda^2}{4} = 2yz = 2\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{\lambda^2}{2}$$

ce qui n'est possible que si $\lambda = 0$ et conduit au point non régulier O. En conclusion, il n'existe pas de point satisfaisant à la condition demandée.

$\square$

2. Démontrer que la courbe Γ est régulière.

Solution. La courbe Γ est définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \sin t \end{cases} \qquad t \in J = \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

Pour $t \in J$, posons $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. La fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et sa dérivée est :

$$\gamma'(t) = \left(-\sqrt{2}\sin t, \cos t, -\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\right) \neq \vec{0} \quad \text{sur J},$$

car sa première coordonnée (par exemple) ne s'annule pas sur J; donc Γ est régulière.

$\square$

3. Vérifier que $\Gamma \subset S$.

Solution. Pour tout $t \in J$, on a :

$$2yz = 2\sin t\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right) = 2(1 - \sin^2 t) = 2\cos^2 t = x(t)^2;$$

donc $\Gamma \subset S$.

$\square$

4. Soit $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
a. Pour quelle valeur de a (dépendante de t), a-t-on $M(t) \in \Gamma_a$?

Solution. La fonction $z' : t \mapsto \dfrac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t$ étant strictement négative sur J, z réalise une bijection de J sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Ainsi le point $M(t)$ appartient au plan $z = a$ si et seulement si $z(t) = a$ donc, d'après ce qui précède, si et seulement si $a \in]0; +\infty[$. $\square$

Dans la suite de cette question, a prend cette valeur.
i. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}(t)$ de la tangente à Γ en $M(t)$.

Solution. Un vecteur directeur de la tangente à Γ en $M(t)$ est :

$$\vec{v}(t) = \gamma'(t) = \left(-\sqrt{2}\sin t, \cos t, -\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\right) = -\left(\sqrt{2}\sin t, -\cos t, \frac{\cos t}{\sin^2 t} + \cos t\right).$$

$\square$

ii. Vérifier que $M(t)$ est un point régulier de Γ_a et déterminer un vecteur $\vec{u}(t)$ directeur de la tangente à Γ_a en $M(t)$.

Solution. La courbe Γ_a est l'intersection des deux surfaces S et P_a (il s'agit de la parabole d'équation $x^2 = 2ay$ située dans le plan P_a). Le point $M(t)$ est donc régulier sur Γ_a si les plans tangents à S et à P_a en $M(t)$ sont distincts.
C'est ici le cas, puisque les vecteurs $\nabla F(M(t)) = 2(x(t), -z(t), -y(t))$ et $(0,0,1)$ ne sont pas colinéaires (la première coordonnée du premier étant non nulle pour tout $t \in J$). De plus le vecteur

$$\vec{u}(t) = (x(t), -z(t), -y(t)) \wedge (0,0,1) = (-z(t), -x(t), 0) = -\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t, \sqrt{2}\cos t, 0\right)$$

dirige la tangente à Γ_a en $M(t)$.
(Alternativement, on pourrait utiliser l'équation cartésienne $x^2 - 2ya = 0$ définissant Γ_a pour établir le résultat). □

iii. Démontrer que $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux.

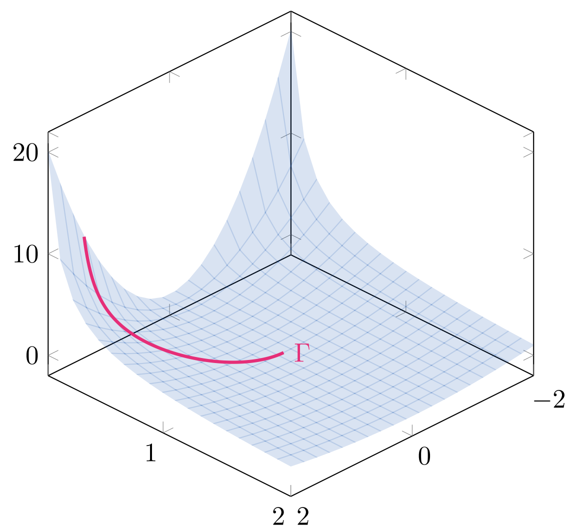
Solution. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ est :

$$\sqrt{2}(1 - \sin^2 t) - \sqrt{2}\cos^2 t = 0;$$

ces deux vecteurs sont bien orthogonaux.

□

Remarque. On représente la courbe Γ ainsi que la surface S (ou plutot l'intersection de celle-ci avec l'ensemble $\{(x,y,z) : x > 0\}$).



Partie II

On considère une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, et deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

On suppose que: $\forall t \in I$, $(f(t), g(t)) \in U$ et $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(f(t), g(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(f(t), g(t))\right) \neq (0,0)$.

On note Σ la surface d'équation cartésienne $z = \varphi(x,y)$ et Γ la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = \Phi(t) \end{cases}, \qquad t \in I$$

où $\Phi(t) = \varphi(f(t), g(t))$.

On note $M(t)$ le point de Γ de paramètre t et on suppose f, g et φ choisies telles que la courbe Γ soit régulière.

Enfin, on admet que $\Gamma \subset \Sigma$.

5. Soit $t \in I$ fixé.
On note P_t le plan d'équation $z = \Phi(t)$ et $\Lambda_t = \Sigma \cap P_t$.

a. On considère un point régulier A de Λ_t de coordonnées (x_0, y_0, z_0).
Déterminer un vecteur tangent à Λ_t au point A.

Solution. La fonction G définie sur $U \times \mathbb{R}$ par $G(x,y,z) = z - \varphi(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathbb{R}$ et son gradient en un point (x,y,z) est :

$$\nabla G(x,y,z) = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y), 1\right).$$

Comme intersection des surfaces Σ et P_t, comme dit plus haut, en un point régulier $A(x_0, y_0, z_0)$ la tangente à Λ_t est dirigée par le vecteur

$$\nabla G(A) \wedge (0,0,1) = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0), 0\right).$$

□

b. En déduire un vecteur tangent $\vec{u}(t)$ à Λ_t au point $M(t)$.

Solution. De la question précédente, on déduit qu'un vecteur tangent à Λ_t au point $M(t)$ est :

$$\vec{u}(t) = \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(f(t),g(t)), \frac{\partial\varphi}{\partial x}(f(t),g(t)), 0\right).$$

□

c. Déterminer un vecteur tangent $\vec{v}(t)$ à Γ au point $M(t)$.
On donnera son expression d'abord à l'aide des fonctions f, g et Φ puis à l'aide des fonctions f, g et φ.

Solution. Un vecteur tangent $\vec{v}(t)$ à Γ au point $M(t)$ est $(f'(t), g'(t), \Phi'(t))$. Puisque $\Phi(t) = \varphi(f(t), g(t)$, on a, par la formule de dérivation en chaine:

$$\Phi'(t) = f'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(f(t),g(t)) + g'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(f(t),g(t))$$

puis :

$$\vec{v}(t) = \left(f'(t), g'(t), f'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(f(t),g(t)) + g'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(f(t),g(t))\right).$$

□

d. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux si et seulement si la relation suivante, notée $(\mathcal{R})$ est vérifiée :

$$f'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(f(t),g(t)) - g'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(f(t),g(t)) = 0. \qquad qquad(\mathcal{R})$$

Solution. D'après les deux questions précédentes, on voit que les vecteurs $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$ sont orthogonaux si et seulement si la relation suivante, notée $(\mathcal{R})$ est vérifiée :

$$f'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(f(t),g(t)) - g'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(f(t),g(t)) = 0.$$

□

Dans la suite de cette partie, on pose $U = \mathbb{R}^2$ et φ est la fonction $(x,y) \mapsto h\left(x^2+y^2\right)$ où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.
On suppose de plus que g ne s'annule pas sur I.

On note Q_α le plan d'équation $z = \alpha$ et $\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha$.

6. a. Justifier que la fonction h est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$.

Solution. a fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée h' ne s'annule pas. Donc (conséquence du théorème des valeurs intermédiaires) h' garde un signe constant sur $\mathbb{R}^+$ et par conséquent h est strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$.

□

b. Justifier que pour tout $\alpha \in h\left(\mathbb{R}^+\right)$, il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}^+$tel que $h\left(t_0\right) = \alpha$. Qu'en est-il si $\alpha \notin h\left(\mathbb{R}^+\right)$?

Solution. D'après les hypothèses de l'énoncé et le résultat de la question précédente, h réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $h(\mathbb{R}^+)$, ce qui signifie que pour tout $\alpha \in h\left(\mathbb{R}^+\right)$, il existe un unique $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $h\left(t_0\right) = \alpha$.
Si $\alpha \notin h\left(\mathbb{R}^+\right)$, un tel t_0 n'existe pas.

□

c. En déduire que pour tout $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$, Λ'_α est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Qu'en est-il si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$?

Solution. Soit $\alpha \in h(\mathbb{R}^+)$ et t_0 l'unique $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $h(t_0) = \alpha$. On a

$$\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x^2 + y^2) = \alpha\} = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid h(x^2 + y^2) = h(t_0)\}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on peut écrire :

$$\Lambda'_\alpha = \{(x, y, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = t_0\}$$

qui est une équation du cercle, situé dans le plan Q_α, de centré en $(0, 0, \alpha)$ et de rayon $\sqrt{t_0}$ (ce cercle est réduit à un point si $t_0 = 0$).
Si $\alpha \notin h(\mathbb{R}^+)$, l'intersection $\Lambda'_\alpha = \Sigma \cap Q_\alpha$ est vide.

□

d. Justifier que Σ est une surface de révolution dont on précisera l'axe.

Solution. On vient de voir que l'intersection de Σ avec les plans Q_α est soit vide, soit un cercle centré sur l'axe (Oz), donc Σ est une surface de révolution d'axe (Oz).

□

7. Démontrer que la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour tout t dans I si et seulement si la fonction $\frac{f}{g}$ est constante sur I.

Solution. D'après les règles de dérivations de fonctions composées, on a, pour tout $(x, y) \in U$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2xh'(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 2yh'(x^2 + y^2)$$

De sorte que la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour tout t dans I si et seulement si

$$2f'(t)g(t)h'(f(t)^2 + g(t)^2) - 2g'(t)f(t)h'(f(t)^2 + g(t)^2) = 0$$

La quantité $h'(f(t)^2 + g(t)^2)$ étant non nulle, la dernière égalité équivaut à :

$$f'(t)g(t) - g'(t)f(t) = 0$$

qui équivaut à $\left(\frac{f}{g}\right)' = 0$ ou encore à $\frac{f}{g}$ constante sur I.

□

On suppose désormais que la relation ($\mathcal{R}$) est vérifiée pour tout $t \in I$.

8. En déduire que Γ est incluse dans un plan dont une équation est de la forme :

$$x + \lambda y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Solution. Si la relation $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour tout $t \in I$, alors $\frac{f}{g}$ constante sur I égale à un certain réel μ. Dans ce cas $f(t) - \mu g(t) = 0$ pour tout $t \in I$. Donc Γ est incluse dans le plan d'équation

$$x + \lambda y \quad \text{où } \lambda = -\mu \in \mathbb{R}.$$

□

a. Rappeler la définition d'une méridienne d'une surface de révolution.

Solution.
Une méridienne d'une surface de révolution est l'intersection de cette surface avec un plan contenant l'axe de révolution. □

b. En déduire que la courbe Γ est incluse dans une méridienne de Σ.

Solution.
Tout plan de la forme précédente contient l'axe (Oz) ce qui permet de conclure que la courbe Γ est incluse dans une méridienne de Σ.

□

●