



## Mathématiques C

Vendredi 25 Avril 2025  
Énoncé

### Préambule

1. Étudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt.$$

2. Énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.  
3. Comparer (sans les calculer)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + 1}$$

(On pourra utiliser le changement de variable  $\frac{1}{t} = x$ .)

### Partie I

1. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}_h$  de la fonction  $h$  qui, à tout réel  $t$  de  $\mathcal{D}_h$ , associe :

$$h(t) = \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

2. Soit  $X$  un réel positif. Calculer  $\int_0^X h(t)dt$  puis, à l'aide de ce résultat,  $\int_X^0 h(-t)dt$ .

3. Que vaut :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^X (h(t) + h(-t))dt?$$

4. Déterminer une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $\varphi$  qui, à tout réel  $t$ , associe :

$$\varphi(t) = \frac{2}{2\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

5. On considère la fonction  $g$  qui, à tout réel  $t$  de son domaine de définition  $\mathcal{D}_g$ , associe :

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

Montrer que  $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h$ , puis déterminer une primitive  $G$  de  $g$  sur  $\mathcal{D}_g$ .

6. Utiliser la primitive de  $g$  obtenue lors du calcul de la question précédente pour calculer simplement, pour tout réel positif  $X$  :

$$\int_0^X g(-t) dt$$

7. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^X (g(t) + g(-t))dt$$

8. Calculer, pour tout réel  $t \geq 0$  :

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t).$$

9. a. Que vaut  $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} dt$  ?
- b. Dédurre des questions précédentes et du **Préambule** la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$ .
10. Calculer  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} dt$ . On donnera la réponse en fonction de  $\arctan(2)$  et  $\ln(5)$ .

## Partie II

1. Dans cette question,  $C$  et  $S$  désignent deux fonctions à valeurs réelles, paires, définies sur un intervalle de la forme  $] -R, R[$ , où  $R$  est soit un réel strictement positif, soit  $+\infty$ .  
On considère les équations différentielles suivantes :

$$\forall x \in ] -R, R[ : \quad C'(x) = -2xS(x) \quad (\mathcal{E}_1)$$

et

$$\forall x \in ] -R, R[ : \quad S'(x) = 2xC(x) \quad (\mathcal{E}_2)$$

avec les conditions initiales

$$C(0) = 1 \quad \text{et} \quad S(0) = 0.$$

Le but de cette question est de déterminer les expressions des fonctions  $C$  et  $S$ , en recherchant leur développement en série entière sur  $] -R, R[$ .

- a. Pour tout réel  $x$  de  $] -R, R[$ , on pose :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$  :

$$(n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1} \quad \text{et} \quad (n+1)b_{n+1} = 2a_{n-1}.$$

- b. En déduire, pour tout entier naturel  $n \geq 4$  :

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)} a_{n-4}.$$

- c. On rappelle que les fonctions  $C$  et  $S$  sont supposées paires. Que peut-on en déduire pour les coefficients de leurs développements en série entière respectifs ?
- d. i. Montrer que tout entier naturel  $n$  peut s'écrire sous l'une des formes suivantes

$$n = 4p \quad \text{ou} \quad n = 4p + 1 \quad \text{ou} \quad n = 4p + 2 \quad \text{ou} \quad n = 4p + 3$$

où  $p$  est dans  $\mathbb{N}$ .

- ii. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  qui n'est pas multiple de 4 :

$$a_n = 0.$$

- e. Montrer que, pour tout entier naturel  $p$  :

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}.$$

- f. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum a_n x^n$  et donner, pour tout réel  $x$  de  $] -R, R[$ , une expression simplifiée de  $C(x)$ , puis de  $S(x)$ .

2. On considère la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$ .

- a. Préciser le rayon de convergence  $R'$  de cette série entière, puis, pour tout réel  $x$  de  $] -R', R'[$ , exprimer la somme

$$D(x) \text{ de la série } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} \text{ en fonction de } x.$$

- b. Montrer que  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4}$  peut s'exprimer comme la somme d'une série numérique, que l'on explicitera.

- c. Que vaut :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (4n+1)} \quad ?$$

### Partie III

Pour tout réel  $X > 0$ , on pose :

$$I(X) = \int_1^X \cos(t^2) dt \quad , \quad J(X) = \int_1^X \sin(t^2) dt.$$

1. Montrer la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

On donne, pour la suite du problème :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. Étudier la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^2} dt.$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que les limites

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} I(X) \quad \text{et} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} J(X)$$

existent et sont finies.

4. Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt.$$

5. Donner le développement en série entière de la fonction  $t \mapsto e^{it^2}$ .
6. a. Déterminer le domaine de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$  :

$$x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt.$$

- b. Montrer que, pour tout réel strictement positif  $x$  :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.$$

- c. Dédire de la question précédente la valeur de :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

- d. Étudier la dérivabilité sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $f$  introduite à la question **6.a.** (pour cela, on se placera sur un intervalle de la forme  $[\varepsilon, a]$ , où  $\varepsilon$  et  $a$  sont deux réels strictement positifs tels que  $\varepsilon \leq a$ ).

- e. Montrer que, pour tout réel strictement positif  $x$  :

$$f'(x) = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}.$$

- f. En déduire, à l'aide des résultats de la **Partie I**, la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$  puis de

$$\int_0^{+\infty} C(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} S(x) dx$$

où  $S$  et  $C$  sont les fonctions introduites au début de la **Partie II**



Dans ce problème, on calcule, à l'aide d'intégrales généralisées, la valeur de l'intégrale (complexe)  $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$ , connue comme l'expression complexe des intégrales (réelles) de Fresnel, qui interviennent dans les phénomènes de diffraction. La somme pour toutes les valeurs de  $x$  peut s'interpréter intuitivement (et de façon très simplifiée) comme le fait qu'à chaque fois qu'une onde lumineuse se propage, une infinité de rayons sont à prendre en compte - et on somme les effets de cette infinité de rayons, en lien avec le principe de superposition de Huygens-Fresnel, en physique.