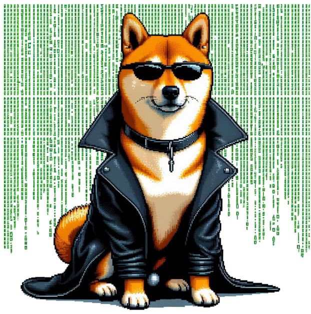
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Algèbre linéaire et bilinéaire

Exercice 1. — Math II 2024

1. Soit $\mathbb{R}^4$ muni sa base canonique. Déterminer la matrice de projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur F qui est défini par le système suivant:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{cases}.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
$$(x+i)^5 - (x-i)^5 = 0.$$

Exercice 2. — Mines-Telecom 2018

Identifier l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\Omega = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. — Math II 2024

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b des réels fixés non nuls et $M_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & b \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$, de taille $(n+1) \times (n+1)$.

On note χ_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Déterminer le rang de M_n. Que peut-on dire de son spectre ?
2. Dans cette question seulement, on suppose $a = b$. Que peut-on dire concernant la diagonalisation de M_n?
3. **a.** En utilisant le résultat de la Question **1.**, montrer que χ_n est divisible par X^{n-1}.
   b. Calculer $\chi_2(x)$.
   c. Montrer que $\chi_{n+1} = X \cdot \chi_n - abX^n$.
   d. Exprimer χ_n en fonction de a, b et n.
   e. Conclure que si $ab > 0$, alors M_n est diagonalisable.

Exercice 4. — Math II

Déterminer les réels x et y rendant minimale l'intégrale suivante :
$$I(x,y) = \int_0^{\pi} \left(t^2 - x\cos t - y\right)^2 \, \mathrm{d}t.$$

Exercice 5. **Math II 2022**

Une matrice à coefficients réels M de taille n est dite «de type P» si elle est symétrique, et si elle vérifie $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ X^\top M X > 0$.

1. Soit M une matrice à coefficients réels symétrique. Montrer que si M est de type P, alors ses valeurs propres sont toutes strictement positives.
2. Réciproquement, montrer que si M une matrice à coefficients réels symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, alors M est de type P.
3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble de toutes les matrices de type P. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable pour la somme.
4. Montrer que si une matrice de $\mathcal{E}$ est inversible, alors son inverse est dans $\mathcal{E}$.
5. Montrer que, si M est de type P, alors $\varphi(X,Y) = X^\top MY$ défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. **Math II 2018**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$. On pose $\varphi : P \mapsto P + (X-1)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.
3. φ est-elle diagonalisable? Bijective?

Exercice 7. **Math II 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0\cdots 0 & 1 \end{array}\right)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(A) \cup \{1\}$.
2. Soit $X \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ et $Y = \begin{pmatrix} X \\ t \end{pmatrix}$. Calculer MY.
3. Dans la suite de l'exercice, on suppose $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
   a. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Déterminer $E_\lambda(M)$ en fonction de $E_\lambda(A)$.
   b. Expliciter $E_1(M)$ et préciser sa dimension.
4. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A l'est.

Exercice 8. **Math II 2021**

Soit E un espace euclidien de dimension 4 dont note $(.\mid .)$ le produit scalaire et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormée de E. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle et A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que
$$(u(e_1) \mid e_1) + (u(e_2) \mid e_2) + (u(e_3) \mid e_3) + (u(e_4) \mid e_4) = 0.$$
2. En déduire qu'il existe $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$ tel que $(u(e_i) \mid e_i) \geqslant 0$ et $(u(e_j) \mid e_j) \leqslant 0$.
3. En considérant la fonction $f : t \mapsto (u\,(te_i + (1-t)e_j) \mid te_i + (1-t)e_j)$, montrer qu'il existe un vecteur unitaire w tel que $(u(w) \mid w) = 0$.
4. En déduire l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ telle que le coefficient de la première ligne et première colonne de la matrice de u dans cette base soit nul.
5. Prouver enfin qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}''$ telle que les coefficients diagonaux de la matrice de u dans cette base soient tous nuls.

Exercice 9. **Math II**

Soient a, b et c trois nombres complexe, de module 1 vérifiant $a+b+c=1$.

1. Montrer que : $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 3 de racines a, b, c.
   Montrer qu' une des trois racines vaut 1 et déterminer les deux autres.

Exercice 10. **Math II 2017**

Soit n un entier naturel impair et P un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ ayant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

$$(X^n+1)P(X)=P(X^2).$$

1. Dire si le polynôme X^n-1 vérifie la propriété $(\mathcal{P})$.
2. Déterminer le degré du polynôme P.
3. Soit ω une racine n-ième de -1. Montrer que $-\omega$ est racine de P.
4. Quels sont les polynômes vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$?

Exercice 11. **Math I 2024**

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. On considère l'application

$$(P,Q)\longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0).$$

1. Montrer que la série converge et que l'application est bien définie.
2. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
3. Donner une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Exercice 12. **Math II**

Soient $n \geqslant 2$ un entier et F un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que F est stable par multiplication. On souhaite montrer que $I_n \in F$. On raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin F$.

1. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \operatorname{Vect}(I_n)$.
2. Soit p le projecteur sur $\operatorname{Vect}(I_n)$ parallèlement à F.
Montrer que, pour toutes matrices M et M', on a $p(MM')=p(M)p(M')$.
3. Montrer que F ne contient pas de matrices inversibles.
4. Montrer que F contient toutes les matrices nilpotentes.
5. Conclure.
Indication. On pourra commencer par le cas $n=2$ puis généraliser ensuite.

Exercice 13. **Math I 2018**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $u\neq 2\mathrm{Id}_E$, $u\neq -3\mathrm{Id}_E$ et

$$u^2+u-6\mathrm{Id}_E=0.$$

1. Montrer que u est un automorphisme et exprimer u^{-1} en fonction de u et Id_E.
2. Soit le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ défini par $F=\operatorname{Vect}(\mathrm{Id}_E,u)$. Déterminer la dimension de F.
3. Montrer que $E=\operatorname{Ker}(u-2\mathrm{Id}_E)\oplus\operatorname{Ker}(u+3\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 14. **Math I**

Soient a et b deux réels distincts, $n\in\mathbb{N}^*$ et D_n le déterminant de taille n défini par :

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

1. Calculer D_1 et D_2.

2. Que vaut D_n si $a=0$ ou $b=0$?

3. On suppose que a et b sont non nuls.

a. Donner une relation de récurrence entre D_{n+2}, D_{n+1} et D_n.
b. En déduire D_n en fonction de n.