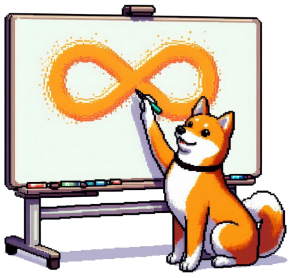
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Analyse

Exercice 1. — Math II 2018

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.
2. Donner le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n.
3. En utilisant la relation $f'(x) + 2xf(x) = 0$, déterminer une relation entre P_{n-1}, P_n, P_{n+1}.
4. En déduire $P_n' = -2nP_{n-1}$, puis une équation différentielle vérifiée par P_n.
5. En déduire les coefficients de P_n.

Exercice 2. — Math II 2023

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, n > 1$, on définit une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - n$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $u_n > 1$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Soit $a > 1$. Montrer que pour tout entier n assez grand on a $f_n(a) > 0$. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite α.
3. On pose $u_n = \alpha + \varepsilon_n$. Déterminer un équivalent de $u_n - \alpha$.

Exercice 3. — Math II 2023

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \leq 1$.
Pour $k \in \mathbb{R}$, on note S_k l'ensemble des réels α tels que $f(\alpha) = k\alpha$.

1. Montrer que pour $k > 1, S_k$ ne contient qu'un seul élément.
2. À l'aide de fonctions affines, montrer que S_1 peut être vide, ou un singleton, ou $\mathbb{R}$ tout entier.
3. Montrer que si S_1 contient deux éléments a et b tels que $a < b$, alors S_1 contient $[a, b]$.

Exercice 4. — Mines-Telecom 2018

1. Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(u_n - \frac{1}{n}\right)$, où $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n x^n$.
3. Déterminer K tel que $\left|u_n - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{K}{n^2}$.

Exercice 5. — Math II 2018

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+3)u_{n+3} = (n+2)u_{n+2} + u_n$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Minorer le rayon de convergence de f.
3. Déterminer des réels a, b, c, d, e tels que $(ax^2+bx+c)f(x) + (dx+e)f'(x) = 0$.
4. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 6. — Math II 2022

On considère l'équation différentielle notée (E) suivante $x(1-x)y' + y = 2x$.

1. Pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, résoudre l'équation différentielle sur chaque intervalle maximal possible.
2. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7. — Math II 2018

On considère l'équation $(E)\ :\ y''(x) - (x^2-1)y(x) = 0$.
1. Montrer que les solutions vérifiant $y(0) = 0$ sont impaires, et que celles vérifiant $y'(0) = 0$ sont paires.
2. On pose $f(x) = e^{ax^2}$. Trouver a tel que f vérifie (E).
3. On pose $g(x) = u(x)e^{\frac{-1}{2}x^2}$. Montrer que g vérifie (E) si et seulement si u vérifie une équation différentielle que l'on déterminera.
4. On pose $h(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Exprimer les solutions de (E) à l'aide de h.

Exercice 8. — Mines-Telecom 2022

Soit f la fonction définie sur $A = [-1,1]^2$ par $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$.

1. Est-ce que f admet un minimum et un maximum sur A ?
2. Étudier les points critiques de f sur $B =]-1,1[^2$. Déterminer leur nature.
3. Déterminer les extremas de f sur A.

Exercice 9. — Math II 2023

On pose $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ et on considère la fonction f définie par $f(x) = \int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I converge.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Monter que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$et calculer f'.
4. En déduire une forme simplifiée de f, puis de I.

Exercice 10. — Math II 2024

On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \left((1+x)^n - 1\right) e^{-x}\mathrm{d}x.$$

1. Montrer la convergence de I_n.
2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, I_n sous forme d'une somme.
4. Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n x^n}{n!} = \frac{xe^x}{1-x}.$$

Exercice 11. — Mines-Telecom

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{n^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$.