Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Préparation à l'oral

Géométrie

Question de cours 1. **Math I 2016**

Caractériser géométriquement l'application qui, à un point du plan complexe d'affixe z, associe le point d'affixe $k\bar{z}$, où $k \in \mathbb{R}^*$ est fixé.

Exercice 1. **Math II 2018**

Soient A et B deux points du plan, et $k \in \mathbb{R}$. Trouver les points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

Exercice 2. **Math II 2018**

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des points M d'affixe $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\max(|a|, |b|) \leq 1$. Soit encore f l'application qui à un point M de $\mathcal{K}$ d'affixe z associe le point M' d'affixe z^2.

1. Représenter $\mathcal{K}$. Étudier l'existence de centre(s) et axe(s) de symétrie.
2. Soit le segment délimité par les points d'affixe 0 et $1 + i$. Déterminer l'image par f de ce segment.
3. Même question avec le segment délimité par 1 et $1 + i$.
4. Déterminer l'image par f du triangle dont les sommets admettent pour affixe $0, 1, 1 + i$.

Exercice 3. **Mines-Telecom 2022**

On considère la courbe Γ paramétrée par $M(t) : \begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 5\sin(t) \end{cases}$.

1. Quelle est la nature de Γ ? Tracer la courbe sans calcul.
2. Déterminer un vecteur normal à Γ en $M(t)$.
3. Déterminer la développée de Γ.

Exercice 4. **Math I 2024**

Soit un espace affine défini par le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit D la droite des abscisses et D' la droite de vecteur directeur $\vec{\imath}$ et passant par le point $B = (0, 1)$ et soit C le cercle tangent à D en O et à D' en B
Soit $(M_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le paramétrage de D' et $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ l'intersection de (OM_t) et de C.

1. **a.** Que peut on dire du triangle OBN_t ?
   b. Déterminer les équations cartésiennes de C et de D'
   c. Déterminer les coordonnées de N_t en fonction de t et de même pour le vecteur $\overrightarrow{N_tM_t}$.

2. On définit le point P_t tel que $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{N_tM_t}$ avec $P_0 = O$.
   Étudier la courbe décrite par P_t.

Exercice 5. **Math II 2018**

On considère la surface (S) : $2x^2+3yz-4z=1$ et la droite (D) : $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ 4x & = & z \end{array}\right.$

1. Tous les points de (S) sont-ils réguliers?
2. Si on considère un point $M(a,b,c)$ régulier, donner l'équation cartésienne du plan tangent à (S) en M.
3. Donner les points où les plans tangents à (S) contiennent D.

Exercice 6. **Math II 2018**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ on considère la surface (S) d'équation

$$(S) : (x-2)^2+y^2+z^2=1$$

et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le point $A_\lambda\,(0,0,\lambda)$.
1. Quelle est la nature de (S) ?
2. Soit D une droite parallèle à (xOy), passant par A_λ et coupant (S) en un point unique, s'il en existe. Montrer qu'alors D est tangente à (S).
3. On note (Σ) la réunion des droites parallèles à (xOy), passant par A_λ pour un certain λ et coupant (S) en un point unique. Calculer une équation cartésienne de (Σ).
4. Déterminer les éléments de symétrie de (Σ).

Exercice 7. **Math II 2018**

On considère la courbe $\mathcal{C}$: $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \alpha\cos(t) \\ y & = & \alpha\sin(t) \\ z & = & \beta \end{array}\right.$ où t est un paramètre parcourant $\mathbb{R}$ et α,β deux constantes réelles avec $\alpha>0$.

1. Identifier la courbe $\mathcal{C}$, en donner les éléments caractéristiques et une équation cartésienne.
2. On considère cette fois la surface $\mathcal{S}$: $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos(\theta) \\ y & = & \sin(\theta) \\ z & = & t \end{array}\right.$ et la droite D_θ qui passe par les points de $\mathcal{S}$ de paramètre $(\theta,1)$ et $(\theta+\alpha,2)$ avec α réel fixé.
Donner une représentation paramétrique de la droite D_θ.
3. Montrer que l'ensemble de ces droites forme une surface de révolution.
4. Trouver une équation cartésienne de cette surface de révolution.

Exercice 8. **Mines-Telecom 2021**

Soit Γ : $\left\{\begin{array}{l} x(t)=2\sin(t)-\sin(t)\cos(t)-t \\ y(t)=(1-\cos(t))^2 \end{array}\right.$ où $t\in[-\pi,\pi]$.

1. Tracer Γ.
2. Déterminer la longueur de Γ.
3. Déterminer le repère de Frenet et la courbure en chaque point de l'arc.

Exercice 9. **Math I 2017**

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, f une fonction numérique réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et (S) la surface paramétrée dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace par :

$$\left\{\begin{array}{l} x=t^2-2t+1+mf(t) \\ y=-2t^2+4t-3-m\left(t^2-2t+1\right) \\ z=2t-1+m \end{array}\right. ,\ t\in I,\ m\in\mathbb{R}.$$

1. Montrer que (S) est une surface réglée.
2. Donner une base du plan tangent à (S) en un point $M\,(t,m)$ régulier, et justifier que ce plan contient toute la génératrice passant par $M\,(t,m)$.
3. Montrer que, pour tout $t\in I$, $M\,(t,0)$ est régulier.
4. Trouver toutes les fonctions f telles que tous les points d'une même génératrice aient le même plan tangent.