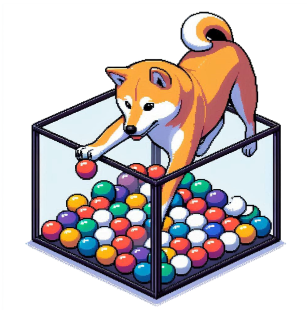
Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Préparation à l'oral

Probabilités

Question de cours 1. — Math I 2024

1. Énoncer les inégalités de Markov et de Bienayme-Tchebychev.
2. Les démontrer.

Exercice 1. — Math I 2018

On étudie l'émission de particules et leur détection par un capteur. On note :

- ✗ X la variable aléatoire réelle associée au nombre de particules émises .
  On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- ✗ K la variable aléatoire réelle associée au nombre de particules détectées (on suppose que chaque particule a une probabilité p d'être détectée, indépendamment des autres, avec $p \in]0,1[$).

1. Que dire de $P(K = k|X = n)$ si $k > n$?
2. Déterminer $P(K = k|X = n)$ pour $k \leq n$.
3. Quelle est la loi de K ?
4. Quelle est la loi de $X - K$?
5. X et K sont-elles indépendantes ?
6. X et $X - K$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. — Math I 2019

On dispose d'un dé pipé de sorte que, la variable aléatoire réelle X qui donne le résultat du lancer de ce dé obéit à la loi suivante :

$$\forall k \in [\![2, 6]\!], P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k - 1).$$

On dispose également d'une pièce de monnaie donnant *Pile* avec la probabilité p.
On lance le dé, puis on lance la pièce de sorte que :

- ✗ si la face obtenue est paire, on lance la pièce jusqu'à avoir *Pile*.
- ✗ si la face obtenue est impaire, on lance la pièce jusqu'à obtenir *Face*.

Soit Y la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers de la pièce effectués en une expérience.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X.
2. Calculer la loi conjointe de (X, Y).
3. En déduire la loi et l'espérance de Y.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. **Mines-Telecom 2024**

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe gradué. À l'instant $t = 0$, le mobile est à la position 0.
Si le mobile est à la position k, il se déplace ensuite à la position $k+1$ avec une probabilité p et à la position 0 avec une probabilité $1-p$. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire donnant la position après n déplacements.

1. Donner la loi de X_1 et X_2, ces variables sont elles indépendantes?
2. Donner la relation entre $P(X_n = k)$ et $P(X_{n-k} = 0)$.
3. Donner la loi de X_n.
4. Donner l'espérance de X_n

Exercice 4. **Math I 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ on pose ; $P(X = i, Y = j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$.

1. Déterminer λ.
2. Déterminer la loi de X. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Z = X - 1$. En déduire l'espérance et la variance de X.
4. Justifier sans calcul que la matrice P de taille $n+1$ et de terme général $p_{i,j} = P(X = i, Y = j)$ est diagonalisable.
5. Déterminer les valeurs propres de P.

Exercice 5. **Math II 2019**

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
2. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir *Pile*. Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de *Face* obtenus.
  a. Donnant la loi de N.
  b. Déterminer l'espérance de N.
3. On relance alors N fois la pièce, et on appelle X le nombre de *Face* obtenus.
  a. Donner la loi de X.
  b. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 6. **Math II 2018**

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note

$$T = \min(X, Y), \qquad Z = |X - Y|, \qquad \text{et} \qquad Q = \frac{Z}{T}.$$

1. Déterminer la loi de T puis l'espérance de $\dfrac{1}{T}$.
2. Déterminer la loi puis l'espérance de Z.
3. Déterminer l'espérance de Q.

Exercice 7. **Math II 2017**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie.

1. Montrer que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} nP(X = n) = \sum_{k=1}^{N} P(X \geqslant k) - N\,P(X \geqslant N+1)$.
2. En déduire que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k)$.

Un automobiliste désire trouver une place de parking. Pour cela il effectue des tours. S'il n'a pas trouvé de place à la fin du $(n-1)^{\text{ème}}$ tour, la probabilité qu'il en trouve une au $n^{\text{ème}}$ tour est $\dfrac{n}{n+1}$.
On note X_i la variable aléatoire valant 0 s'il ne trouve pas de place au $i^{\text{ème}}$ tour, et 1 s'il en trouve une. On note T la variable aléatoire comptant le nombre de tours qu'il effectue.

3. Calculer $P(T \geqslant 1)$.
4. Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $P(T \geqslant n) = P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} (X_i = 0)\right)$.
5. Trouver le nombre moyen de tours que doit effectuer l'automobiliste pour pouvoir garer sa voiture.

Exercice 8. Mines-Telecom

Soit un alphabet de $n \geqslant 1$ lettres, et M_n le nombre de mots que l'on peut écrire en utilisant une seule fois au plus la même lettre. Montrer $M_n = \lfloor n!e^1 \rfloor$.

Exercice 9. Math II 2017

On lance indéfiniment une même pièce pipée dont la probabilité de tomber sur *Pile* vaut $2/3$. On note, pour $k \in \mathbb{N}^*$, X_k la v.a qui prend la valeur 1 ou 0 selon que l'on a obtenu *Face* ou *Pile* au $k-$ème lancer. Soit T la v.a qui prend pour valeur le nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux *Face* consécutifs.
Pour $n \in T(\Omega)$ on note $p_n = P(T = n)$.

1. Expliciter $T(\Omega)$.
2. Calculer p_1 et p_2.
3. Montrer que $\{(X_1 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 1)\}$ est un système complet d'évènements.
En déduire, pour $n \geqslant 3$, la relation :
$$p_n = \frac{2}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2}.$$
4. Calculer p_n en fonction de n.
5. T admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.