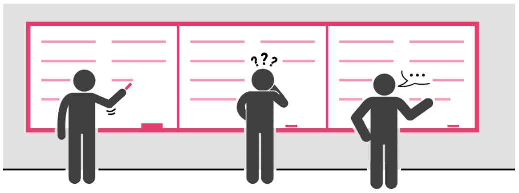
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°1

Du Lundi 09 Septembre au Vendredi 13 Septembre
Planche n°1

Question de cours

`Python.` Écrire une fonction récursive d'en-tête `def nb_termes_pos(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie le nombre de termes positifs ou nuls de cette liste.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

i. $\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x) + 1$.
ii. $\cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x)$.

Exercice 2

Soient a, b, c, d dans $[0, \pi]$.

1. Montrer $\sin(a) + \sin(b) \leqslant 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Quand y a-t-il égalité?

2. Montrer $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) + \sin(d) \leqslant 4\sin\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)$.

3. En déduire $\sin(a) + \sin(b) + \sin(c) \leqslant 3\sin\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$.

Exercice 3

Après avoir vérifié que

$$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1},$$

calculer, pour $p, q \in]0, 1[$,

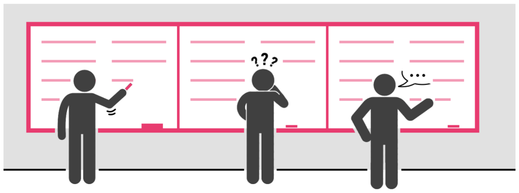
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right).$$

Exercice 4

On considère l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre cette équation en développant.
2. Résoudre cette même équation en utilisant les racines cinquièmes de l'unité.
3. En comparant les deux résultats obtenus, déterminer une valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°1

Du Lundi 09 Septembre au Vendredi 13 Septembre
Planche n°2

Question de cours

Énoncer et démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton.

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Transformer $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$ en produit.
2. Résoudre l'équation $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x) = 0$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 2

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $x \not\equiv 0[\pi]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(kx)}{\cos^k(x)}$.

Exercice 3

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, racine troisième de l'unité.

1. Calculer les valeurs de j^3 et de $1 + j + j^2$.

2. Calculer successivement, pour $k = 3p$ (avec $p \in \mathbb{N}$), $k = 3p+1$ et $k = 3p+2$, la valeur de la somme $S_k = 1 + j^k + \left(j^2\right)^k$.

3. Soit P un polynôme à coefficients complexes, de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

   Calculer $P(X)+ P(jX) + P\left(j^2X\right)$, qu'on exprimera en fonction des coefficients de P.

4. **a.** Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Développer et simplifier le polynôme $R_\omega(X) = (X - \omega)(jX - \omega)\left(j^2X - \omega\right)$.
   b. Soit le polynôme $Q(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q\left(j^2X\right)$. Montrer qu'il existe un polynôme H à expliciter tel que tel que $T(X) = H(Y)$.
   c. Déterminer de deux façons différentes les racines de T.

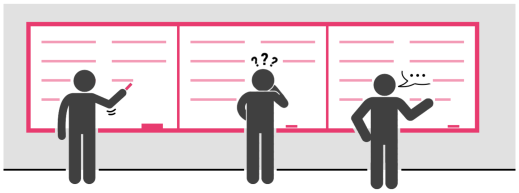
Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n+1)H_n - n$.

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°1

Du Lundi 09 Septembre au Vendredi 13 Septembre
Planche n°3

Question de cours

Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \binom{j}{i} 2^i$.

Exercice 2

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$$

admet-elle des solutions? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$. .

Exercice 3

1. Montrer : $\forall \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \quad \tan(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)} - \dfrac{2}{\tan(2\alpha)}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{\pi}{2^{k+2}}\right)$.

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

On introduit également $u_n = \dfrac{T_n}{S_n}$, et $v_n = 5\left(u_{n+1} - u_n\right)$.

1. Donner les valeurs de S_n et T_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
2. En déduire les valeurs de u_n et v_n pour tous les entiers n inférieurs ou égaux à 5.
3. Conjecturer quant à l'expression de v_n en fonction de n puis à propos de celle de u_n, et enfin celle de T_n.
4. Démontrer la formule conjecturée par récurrence.

Mathématiques PT 2024-2025
J.Roger

Semaine de colle 1
Planche 1

Question de Cours.
Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $$\sin(x) + \sin(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$
2. $$\cos^2(x) - 2\sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

Exercice 2.
À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\tan(3x)$ en fonction de $\tan(x)$.

Exercice 3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X+1)^{2n} + (X-1)^{2n}$

1. Donner le degré et le coefficient dominant de P sans justifier.
2. Factoriser P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire que P se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ sous la forme
$$P = 2\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 + \tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right)\right)$$
4. En déduire une expression de
$$\prod_{k=0}^{n-1}\tan^2\left(\frac{2k+1}{4n}\pi\right)$$

Semaine de colle 1
Planche 2

Question de Cours.
Énoncer et démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton

Exercice 1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n$$

Exercice 3.
Déterminer deux réels a et b tels que 1 soit racine double de $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser le polynôme obtenu en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Semaine de colle 1
Planche 3

Question de Cours.
Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Exercice 1.
Résoudre sur $[0;\pi]$ l'inéquation

$$\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) \geq 0$$

Exercice 2.
Factoriser le polynôme

$$P = X^8 + X^4 + 1$$

en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.

1. Exprimer $e^{in\pi/3}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
2. En déduire une expression de

$$S = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-3)^k$$

Exercice 4. Déduire de la question de cours une expression de $S_1 = \sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$ et de $S_2 = \sum_{k=0}^{n} k\sin^3(k\theta)$

Colle PT – 1
Jeudi 12/09/24

A] **Question de cours :**

Enoncer les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.
Donner et démontrer la formule d'addition de tan(a+b)

Exercices :

1) Exprimer le plus simplement possible la somme : S = $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^k(1-2X)^{n-k}X^k$

2) Résoudre dans R puis dans $[0\,;4\pi[$ l'équation : $\cos^2(2x) + \frac{5}{2}\cos(2x) - \frac{3}{2} = 0$

3) En écrivant $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ sous la forme du produit de deux autres coefficients binomiaux, prouver que : $\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$

4) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur explicite de u_n.

B] **Question de cours :**

Donner et démontrer la formule du binôme de Newton

Exercices :

1) Résoudre dans R : cos(x) + cos(2x) = 0

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n}(2.3^k - 4)$

Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

3) a) Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme P = $(X+1)^n - e^{2ina}$, où a est un réel.

b) En déduire : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a+\frac{k\pi}{n})$. Que vaut $\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{k\pi}{n})$?

C] **Question de cours :**

Factoriser $X^5 - 1$ dans R[X].

Exercices :

1) Résoudre dans R l'équation : sin(x/2) + sin(2x) = 0

2) Calculer : S = $\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$

3) a) Soit $(n,p)\in\mathbb{N}$, avec $0 \le p \le n$. Montrer que : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

b) Que donne la formule précédente si on fixe : p = 1 ?

c) En fixant p = 2, en déduire la valeur de S = $\sum_{k=1}^{n}k^2$.

d) Après avoir simplifier $\binom{k+1}{3}$, trouver la valeur de T = $\sum_{k=1}^{n}k^3$.

4) Soit f la fonction définie par : $\boxed{f(x) = \frac{2\ln(1+x)-x}{x}}$ si x non nul et $f(0) = 1$.

Quel est l'ensemble de définition de f ? Est-elle continue sur cet ensemble ? Justifier.
Est-elle dérivable sur cet ensemble ? Justifier

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour BOULIF Lamia
le mar. 10 sept. 24

Semaine 1

Trigonométrie, calcul algébrique ; Racines de l'unité ; Polynômes

Question de cours. Exprimer $\tan(x+y)$ à l'aide de $\tan(x)$ et $\tan(y)$.

Exercice 1 Résoudre dans $]-\pi\,,\pi]$ l'équation $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Exercice 2 Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$.

Une fois cette condition remplie, factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Élements de correction

Exercice 1 On calcule d'abord $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$. Ainsi $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \iff \sin(2x) = 0$ ou $2\cos(x) + 1 = 0$.
On obtient comme ensemble de solution $\left\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$.

Exercice 2 D'après le cours,

$$\begin{aligned} 1 \text{ est racine double de } \mathrm{P} = \mathrm{X}^5 + a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} &\iff \mathrm{P}(1) = \mathrm{P}'(1) = 0 \text{ et } \mathrm{P}''(1) \neq 0 \\ &\iff \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 5 + 2a + b = 0 \\ 20 + 2a \neq 0 \end{cases} \\ &\iff a = -4 \text{ et } b = 3 \end{aligned}$$

On obtient $\mathrm{X}^5 - 4\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)^2(\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 3)$ et c'est la factorisation cherchée car le discriminant de $\mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 3$ est strictement négatif.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour HAMITOUCHE Léna
le mar. 10 sept. 24

Semaine 1

Trigonométrie, calcul algébrique ; Racines de l'unité ; Polynômes

Question de cours. Factoriser $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(5x) = \sin(3x)$.

Exercice 2 Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.
Démontrer que $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine de P et déterminer sa multiplicité.

Élements de correction

Exercice 1 Avec la formule $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$, on obtient $\sin(5x)-\sin(3x) = 2\cos(4x)\sin(x) = 0 \iff x \equiv 0\ [\pi]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{8}\ [\frac{\pi}{4}]$.

Exercice 2

• On sait que j vérifie $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1 = 0$ donc $\mathrm{j}+1 = -\mathrm{j}^2$. Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{j}) = -\mathrm{j}^{14}-\mathrm{j}^7-1$. Or $\mathrm{j}^3 = 1 \implies \mathrm{j}^7 = \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}^{14} = \mathrm{j}^2$ donc il vient $\mathrm{P}(\mathrm{j}) = -\mathrm{j}^2-\mathrm{j}-1 = 0$. CQFD.

• Puisque $\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = 7[(\mathrm{X}+1)^6-\mathrm{X}^6]$ et que $(\mathrm{j}+1)^6-\mathrm{j}^6 = \mathrm{j}^{12}-\mathrm{j}^6 = 1-1 = 0$, on a $\mathrm{P}'(\mathrm{j}) = 0$ donc j est au moins de multiplicité 2.

Puisque $\mathrm{P}'' = 42[(\mathrm{X}+1)^5-\mathrm{X}^5]$ et que $(\mathrm{j}+1)^5-\mathrm{j}^5 = -\mathrm{j}^{10}-\mathrm{j}^5 = -\mathrm{j}-\mathrm{j}^2 = 1$, on a $\mathrm{P}''(-\mathrm{j}) \neq 0$. Donc j est de multiplicité 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour TAHI Jensen
le mar. 10 sept. 24

Semaine 1

Trigonométrie, calcul algébrique ; Racines de l'unité ; Polynômes

Question de cours. Écrire en Python une fonction récursive d'en-tête `nb_termes_pos(L)` qui prend en argument une liste `L` et renvoie le nombre de termes positifs ou nuls de cette liste.

Exercice 1 Résoudre sur $[0,2\pi]$ l'inéquation $\cos(x) \geqslant \cos(3x)$.

Exercice 2 Après avoir justifié que, pour tous $n,k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\binom{n}{k} = \frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = (n+2)2^{n-1}$$

Élements de correction

Exercice 1 Avec la formule $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$, on obtient $\cos(x) \geqslant \cos(3x) \iff \sin(x)\sin(2x) \geqslant 0$. On fait un tableau de signes sur $[0\,,2\pi]$ pour obtenir comme ensemble de solution $[0\,,\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}\,,2\pi]$.

Exercice 2
Par calcul direct, avec $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} + 2^n = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} + 2^n = n2^{n-1} + 2^n = (n+2)2^{n-1}$.
Ou bien en utilisant la formule du binôme, $f(x) := x(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}$. En dérivant, $f'(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n + nx(1-x)^{n-1} = (1+(n+1)x)(1-x)^{n-1}$. L'évaluation en $x=1$ donne le résultat attendu.