Mathématiques PT 2024-2025
J. Roger

Semaine de colle 10
Planche 1

Question de Cours.

On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Déterminer la nature de la série ainsi qu'un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de la somme partielle de rang n.

Exercice 1.

À quelle condition sur x, la famille de vecteurs ci-dessous est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Vous justifierez votre réponse à l'aide d'un calcul de déterminant.

$$((7-x, 2, -2), (2,4-x, -1), (-2, -1,4-x))$$

Exercice 2.

Soit $u_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. À l'aide de la formule $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b}$, calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)$$
2. En déduire la convergence de la série $\sum u_n$ puis la valeur de la somme.

Semaine de colle 10
Planche 2

Question de Cours.
Énoncer les propriétés du déterminant (Proposition 3) et les démontrer (sauf points vi. et vii.).

Exercice 1.
Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et D_n le déterminant d'ordre n défini par

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Trouver une relation de récurrence entre D_n etD_{n-1} et en déduire l'expression de D_n.

Exercice 2.
Étudier la nature de la série $\sum \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ et sa valeur et en déduire celles de $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ et de $\sum \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$.

Semaine de colle 10
Planche 3

Question de Cours.
Déterminer les valeurs possibles du déterminant d'un projecteur et d'une symétrie d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice 1.
Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On définit le déterminant D_n d'ordre n par

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & \cdots & b \\ a & a+b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre D_n et D_{n-1} et en déduire que $D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ lorsque $a \neq b$.
2. Calculer ce déterminant lorsque $a = b$.

Exercice 2.
On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(ln(n))^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. À l'aide d'une minoration, montrer que cette série diverge lorsque $\alpha \leq 0$.
2. À l'aide d'une comparaison à une intégrale, étudier la nature de cette série lorsque $\alpha > 0$.

A] Question de cours :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n$ des scalaires. Calculer $\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & x & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$.

Exercices :

1) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

2)

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

3)

On considère les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice $B = TA$ et calculer le déterminant de B.
2. Déduire de la question précédente le déterminant de A.
3. Déduire de la question précédente le déterminant de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & 6 & 40 \end{pmatrix}.$$

B] Question de cours :

Déterminer les valeurs possibles du déterminant d'un projecteur et d'une symétrie d'un espace de dimension finie.

Exercices :

1) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = e^{-3n}$ et calculer sa somme.

2)

Montrer que $D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

3) Déterminer un équivalent simple de $\ln(n!)$

C] **Question de cours :**

Déterminer la nature de la série $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\ln(k)}$ et donner en équivalent quand n tend vers $+\infty$ de la somme partielle de rang n.

Exercices :

1) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = (-1)^n \cos(n\theta)$

2)

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

3)

En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}.$$

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour FOURNEAUX Swan
le jeu. 28 nov. 24

Semaine 10

Déterminants – Séries numériques

Question de cours. On considère la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$.
Déterminer la nature de la série ainsi qu'un équivalent, lorsque $n \to +\infty$ de la somme partielle de rang n.

Exercice 1. Soit un entier $n \geqslant 2$.
Soit $\mathrm{M}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathrm{M}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminer $\Delta_n = \det \mathrm{M}_n$.

Exercice 2.

Élements de correction
FOURNEAUX SWAN

Exercice 1.
On développe par rapport par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne, ce qui donne la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 : $\Delta_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$.
Avec $\Delta_1 = 1$ et $\Delta_2 = 0$, on peut à la main calculer les premiers termes de la suite et voir apparaître une structure périodique de période 6 : $\Delta_{6k+r} = 1$ si $r \in \{0, 1\}$, $= 0$ si $r \in \{2, 5\}$ et $= -1$ si $r \in \{3, 4\}$.
Plus méthodiquement, les racines de l'équation caractéristique sont $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et son conjugué. On a donc une solution de la forme $\Delta_n = \alpha \mathrm{e}^{in\pi/3} + \beta \mathrm{e}^{-in\pi/3}$. On détermine les complexes α et β grâce aux conditions initiales : $\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$ et $\beta = \overline{\alpha}$. En remplaçant et après simplification, on obtient l'expression $\Delta_n = \dfrac{\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}(2n-1)}\right)}{\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}\right)}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour ROCHE Maëlle
le jeu. 28 nov. 24

Semaine 10

Déterminants – Séries numériques

Question de cours. Déterminer les valeurs possibles du déterminant d'un projecteur et d'une symétrie d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Exercice 1 . On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \,]0\,,1[\\ u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \quad \text{pour} n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*on pourra montrer qu'elle est décroissante et minorée par 0*).
2. Déterminer la nature de la série $\sum u_n^2$
3. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, et en déduire celle de la série $\sum u_n$.

Exercice 2.

Élements de correction
ROCHE Maëlle

Exercice 1.

- $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ et l'étude de $f\colon x \mapsto x - x^2$ montre que $x \in [0\,,1] \implies f(x) \in [0\,,1]$, d'où le résultat : $u_n \to 0$ (par point fixe).
- $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$ donc par téléscopage, $\sum u_n^2$ converge.
- Par télescopage $\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant \mathrm{N}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{\mathrm{N}+1}) - \ln u_0 \to -\infty$ (car $u_n \to 0$), donc la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
- $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1 - u_n) = -u_n + o(u_n)$ (car $u_n \to 0$). Par comparaison, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour THERESIN Killian
le jeu. 28 nov. 24

Semaine 10

Déterminants – Séries numériques

Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0,\ a_1, \dots, a_n$ des scalaires.

Calculer en fonction de x le déterminant $\begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Exercice 1.

1. Donner la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$.

2. Démontrer que, pour tout entier n, le nombre réel $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un nombre entier pair.

3. En déduire la nature de la série $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Exercice 2.

Élements de correction
THERESIN Killian

Exercice 1. • $0 \leqslant 2-\sqrt{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2-\sqrt{3})^n = 0$: alors $\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi(2-\sqrt{3})^n$ qui est le terme d'une série géométrique convergente. La série est donc convergente.
• $\forall n,\ (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}((\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k)$. Pour $k = 2p$ pair, $(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k = 3^p + 3^p = 2 \times 3^p \in 2\mathbb{N}$; et pour $k = 2p+1$ impair, $(\sqrt{3})^k + (-\sqrt{3})^k = 3^p\sqrt{3} - 3^p\sqrt{3} = 0$. On a donc bien par linéarité $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n \in 2\mathbb{N}$.
• Alors $(2+\sqrt{3})^n = 2a_n - (2-\sqrt{3})^n$ (avec $a_n \in \mathbb{N}$) donc $\sin\left(2a_n\pi - \pi(2+\sqrt{3})^n\right) = -\sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$, qui est bien le terme général d'une série convergente.

Exercice 2.