Semaine de colle 11
Planche 1

Question de Cours.
Énoncé du critères spécial des séries alternées. Application :
Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exercice 1.
Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.
Déterminer la nature des séries de terme général suivant.

$$u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \qquad v_n = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-n} \qquad w_n = \frac{n!}{n^n}$$

Exercice 3. Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ sont de même nature.

Semaine de colle 11
Planche 2

Question de Cours.

Énoncé le critère de d'Alembert. Application :

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de a et de b la nature de la série $\sum \dfrac{b^n (n!)^a}{(2n)!}$

Exercice 1.

Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ -5 & -7 & 5 \\ -5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Exercice 3.

Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\theta)}{2^n}$$

est convergente et calculer sa somme.

Semaine de colle 11
Planche 3

Question de Cours.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(M)\lambda + \det(M) = 0$$

Exercice 1.

1. Étudier suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général $u_n = \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1$.
2. Étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{1 + 2 + \cdots + n}\right)$$

Exercice 2.

On considère la série de terme général $u_n = \frac{2n-1}{n^3-4n}$ définie pour $n \geq 3$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Déterminer une décomposition en élément simple de u_n.
3. En déduire la valeur de la somme de la série $\sum u_n$

Colle PT – 11 Jeudi 04/12/24

A] **Question de cours :**

Énoncé du critère de d'Alembert.

Application : Soit a,b ∈ R. Déterminer, en fonction de a et b la nature de la série de terme général $U_n = \frac{b^n (n!)^a}{(2n!)}$

Exercices :

1) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

2) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = e^{-3n}$.

3) Déterminer la nature de la série de terme général : $U_n = \frac{n+3}{n^2+n+1}$.

4) Montrer la convergence de $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

B] **Question de cours :**

Énoncé du critère spécial des séries alternées.

Montrer que la série de terme général $U_n = \frac{(-1)^n}{(n)^\alpha}$ converge si et seulement si α>0.

Exercices :

1) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

2) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

3) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = \frac{2^n n!}{n^n}$

4) Déterminer la nature de la série de terme général : $U_n = \frac{(n+2)^{\frac{4}{3}}}{(n+1)((n+3)^{\frac{3}{2}}}$.

C] **Question de cours :**

Soient $M \in M_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Montrer que les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation :$\lambda^2 - tr(M) + \det(M) = 0$

Exercices :

1) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = n\, ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

2) Etudier la convergence de la série de terme général : $U_n = \frac{n!}{n^n}$

3) Etudier la convergence puis la somme de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$

4)

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

5)

En exploitant une comparaison série-intégrale, déterminer

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}.$$

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour FILONOVICH Anastacia
le mar. 3 déc. 24

Semaine 11

Séries numériques – Réduction des endomorphismes

Question de cours. Soit $\sum w_n$ une série absolument convergente.
Montrer rigoureusement que $\sum w_n^2$ et $\sum \frac{w_n}{n}$ sont des séries convergentes.

Exercice 1. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$, dans les cas suivants :

1. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$;

2. $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.

Élements de correction
FILONOVICH Anastacia

Exercice 1.

- Par DL, $\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. On écrit ensuite la somme partielle : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$. La première somme est convergente (CSSA + Riemann) mais pas la seconde : nécessairement, la série $\sum u_n$ diverge.
- Pour $n > 0$, $\sqrt{n^2+n+1} = n(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{2}} = n(1+\frac{1}{2n}+\frac{3}{8n^2}+O(\frac{1}{n^3}))$ donc $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{8n}+O(\frac{1}{n^2})$. Les formules d'addition du cosinus donnent alors $u_n = (-1)^{n+1}\sin(\frac{3\pi}{8n}+O(\frac{1}{n^2})) = (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n} + O(\frac{1}{n^2})$. La série $\sum(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n}$ converge par CSSA, et le deuxième terme est le terme d'une série absolument convergente donc $\sum u_n$ converge

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour SAHLI Sandra
le mar. 3 déc. 24

Semaine 11

Séries numériques – Réduction des endomorphismes

Question de cours. Énoncé du critère de d'Alembert.

Application : Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de a et b la nature de la série $\sum \frac{b^n (n\,!)^a}{(2n)\,!}$

Exercice 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$.

1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n>0} u_n$.

2. Déterminer un équivalent de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.

Élements de correction
SAHLI Sandra

Exercice 1.

- $u_n > \frac{1}{n}$ donc la série $\sum u_n$ diverge.
- La fonction $f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$ est décroissante sur $[\exp(2), +\infty[$ car $f'(x) = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$: on peut donc utiliser une comparaison avec une intégrale pour $n \geqslant n_0 = \lfloor \exp(2) \rfloor + 1$. Ainsi $\int\limits_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$, i.e. $\frac{1}{3}\left(\ln^3(n+1) - \ln^3 n\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{3}\left(\ln^3(n) - \ln^3(n-1)\right)$.

  Par sommation et télescopage, $\frac{1}{3}\left(\ln^3(n+1) - \ln^3 n_0\right) \leqslant \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{3}\left(\ln^3(n) - \ln^3(n_0-1)\right)$.

  On rajoute les termes du début, mais ça ne change rien à l'équivalent : $\mathrm{S}_n \sim \frac{1}{3}\ln^3 n$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour JOLLY-HARA Paul-Émile
le mar. 3 déc. 24

Semaine 11

Séries numériques – Réduction des endomorphismes

Question de cours. Énoncé du critère spécial des séries alternées.
Application : montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Exercice 1. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$, puis celle de $\sum u_n$.

Exercice 2.

Élements de correction
JOLLY-HARA Paul-Émile

Exercice 1.

- La suite est décroissante, bornée par 0 donc convergente, et sa limite est nulle (point fixe).
- $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty$ donc par télescopage, la série $\sum \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ diverge.
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sin u_n}{u_n} = 1 - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$ donc $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = -\frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$. Par équivalence (termes positifs), la série $\sum u_n^2$ diverge. Et puisque $0 < u_n < 1$, $u_n^2 < u_n$, donc $\sum u_n$ diverge aussi.

Exercice 2.