Semaine de colle 12
Planche 1

Question de Cours.
Énoncé les critères de diagonalisabilité (Théorème 8 et Théorème 9).

Exercice 1.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer son polynôme caractéristique et en déduire qu'elle est diagonalisable.
2. En déduire son rang et la dimension de son noyau.
3. Déterminer une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$
4. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, où $n \geq 3$, une matrice vérifiant

$$rg(A) = 2 \qquad tr(A) = 0 \qquad A^n \neq 0_n$$

Montrer que A est diagonalisable.

Semaine de colle 12
Planche 2

Question de Cours.

Déterminer sans calcul si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. Que peut-on en conclure quant à la diagonalisabilité/trigonalisabilité de A ?
2. Diagonaliser ou trigonaliser la matrice A. On notera P la matrice de passage associée et A' la matrice diagonale ou trigonale telles que $A = PA'P^{-1}$.

Exercice 2.

Déterminer une expression des termes généraux des suites (u_n) et (v_n) données, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -u_n + 4v_n \end{cases}$$

en fonction de u_0 et v_0.

Semaine de colle 12
Planche 3

Question de Cours.
Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si λ est une valeur propre de f alors λ est racine de tout polynôme annulateur de f.

Exercice 1.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. Que peut-on en conclure quant à la diagonalisabilité/trigonalisabilité de A ?
2. Montrer que $A = PA'P^{-1}$ où

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et a et P sont à déterminer.
3. Déduire des questions précédentes une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Étudier la diagonalisabilité de la matrice ci-dessous suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} -2-a & 5+a & a \\ a & -2-a & -a \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Colle PT – 12 **Jeudi 12 Décembre 2024**

A] **Question de cours :**

Soient $M \in M_2(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Montrer que les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation :$\lambda^2 - tr(M) + \det(M) = 0$

Exercices :

1) Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 8 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant exactement un coeur et au moins 6 trèfles ?

2) Soient A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et M=$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ deux matrices réelles.

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme : $M \longmapsto AM - MA$

3) Diagonaliser la matrice : A = $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ puis calculer la puissance $n^{ième}$ de A .

B] **Question de cours :**

On tire simultanément cinq cartes d'un jeu de 32.

Combien y a-t-il de mains contenant exactement deux rois et trois cartes de pique ?

Exercices :

1) Soit a un réel et soit la matrice : A = $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix}$

a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A admet une valeur propre double.

b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice A est diagonalisable

2) Soit E l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{C}$. On note f l'application définie de E dans E qui à toute suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n+u_{n+1}}{2}$.

Montrer que f est linéaire et déterminer ses éléments propres.

C] **Question de cours :**

Enoncer les critères de diagonalisabilité.

Exercices :

1) Dans un jeu de 52 cartes, on tire simultanément 4 cartes.

Combien de tirages différents peut-on obtenir contenant exactement un roi et 2 trèfles ?

2) $E = \mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit f: $P \longmapsto P(X-1)$.

Vérifier que f est linéaire et déterminer ses éléments propres.

3) Soit la matrice : A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$

a) Calculer le rang de A. En déduire sans calcul le polynôme caractéristique de A.

b) Donner les éléments propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
Si oui, la diagonaliser.

c) Déterminer une expression simple de A^n, pour tout entier naturel n.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Pour HUET MAXENCE
le mar. 10 déc. 24

Semaine 12

Réduction des endomorphismes – Dénombrement

Question de cours. Déterminer sans calcul si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

Exercice 1. Soit un entier $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\mathrm{rg}(A) = 2,\ \mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$. Déterminer le nombre de valeurs propres de A et démontrer que A est diagonalisable.

Exercice 2.

Élements de correction
HUET Maxence

Exercice 1.
A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque $\dim \operatorname{Ker} A = n-2$, 0 est valeur propre, de multiplicité $n-2$. Notons λ_1 et λ_2 les deux autres valeurs apparaissant sur la diagonale d'une matrice triangulaire semblable à A : $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = 0$, donc $\lambda_1 = -\lambda_2$.
Si on avait $\lambda_1 = 0$, on aurait A nilpotente (car que des zéros sur la diagonale), et alors $A^n = 0$, ce qui est exclut. Donc $\lambda_1 \neq 0$ et on a deux valeurs propres λ_1 et $\lambda_2 = -\lambda_1$ distinctes.
Nécessairement, l'espace propre associé à chacune d'elles ne peut avoir une dimension supérieure à 1 (sinon la somme des dimensions des espaces propres, y compris $E_0 = \operatorname{Ker} A$) dépasserait n).
On a donc identifié 3 valeurs propres, dont la somme des dimensions des espaces propres associés est égale à n : cela prouve que A est diagonalisable.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour LOUZANI Amel
le mar. 10 déc. 24

Semaine 12

Réduction des endomorphismes – Dénombrement

Question de cours. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors λ est racine de tout polynôme annulateur de f.

Exercice 1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

1. Trouver les conditions sur le triplet (a, b, c) pour que M soit diagonalisable.
2. Préciser dans ce cas la matrice P des vecteurs propres.

Exercice 2.

Élements de correction
LOUZANI AMEL

Exercice 1.

• M étant triangulaire, on voit que $\operatorname{Sp} M = \{1, c\}$.
Si $c = 1$, alors M diagonalisable $\iff$ elle est semblable à la matrice identité $\iff$ $M = PI_3P^{-1} = I_3$. Mais M n'est clairement pas égale à I_3 (à cause du coefficient $m_{13} = 1$) donc, si $c = 1$, M n'est pas diagonalisable.
On considère maintenant le cas où $c \neq 1$ et on cherche les espaces propres E_1 et E_c.

$MX = X \iff \begin{cases} ax_2 + x_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \\ cx_3 = x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} ax_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ (car $c \neq 1$). On refait une distinction de cas : si $a \neq 0$, alors $MX = X \iff x_2 = x_3 = 0 \iff X \in \operatorname{Vect}(1, 0, 0)$ et $\dim E_1 = 1 < m(1)$: M n'est alors pas diagonalisable. Et si $a = 0$, alors $MX = X \iff x_3 = 0 \iff X \in \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ et $\dim E_1 = 2 = m(2)$.
Puisque $\dim E_c \geqslant 1 = m(c)$, il vient que M est alors diagonalisable.
Au final, M est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$.

• Dans le cas de diagonalisablilité, on sait déjà que $E_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. Reste à déterminer E_c : on écrit $MX = cX \iff \begin{cases} x_1 + x_3 = cx_1 \\ x_2 + bx_3 = cx_2 \end{cases} \iff X \in \operatorname{Vect}(1, b, 1 - c)$. Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 - c \end{pmatrix}$

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour KUNZT Eliott
le mar. 10 déc. 24

Semaine 12

Réduction des endomorphismes – Dénombrement

Question de cours. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que les valeurs propres de M sont les solutions de l'équation

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(M)\lambda + \det(M) = 0$$

Exercice 1. Soit un entier $n \geqslant 2$, et $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.
Soient J et M_{ab} les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{ab} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Avec un minimum de calcul, déterminer le spectre de J et ses espaces propres.
   Est-ce que J est diagonalisable ?
2. En déduire que M_{ab} est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres et espaces propres.

Exercice 2.

Élements de correction
KUNZT ELIOTT

Exercice 1.

• J est clairement de rang 1, donc $\dim \operatorname{Ker} J = \dim E_0 = n-1$, et une base de E_0 est formée par la famille $(e_i - e_{i+1})_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$.
Par ailleurs, en notant $v = \sum e_i$, on a $Jv = nv$ donc n est valeur propre : pour des questions de dimensions, E_n est réduit à $\operatorname{Vect}(v)$.
La somme des dimensions des espaces propres de J étant égale à n, J est diagonalisable.
• $M_{ab} = aI_n + bJ$: en calculant $M_{ab}(e_i - e_{i+1})$ et $M_{ab}v$, on identifie une base de vecteurs propres de M_{ab}, dont les valeurs propres sont $a+nb$ (multiplicité 1) et a (multiplicité $n-1$).

Exercice 2.