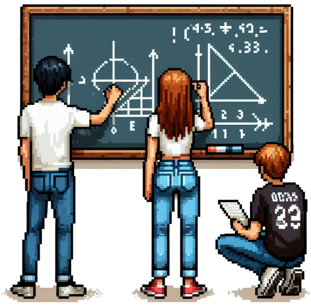


Semaine de colle n°13

Du Lundi 16 Décembre au Vendredi 20 Décembre
Planche n°1

Question de cours

Formules des probabilités totales (versions 1 et 2). Énoncés avec hypothèses clairement formulées.

Exercice 1

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. À chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.

1. **Étude pour un nombre fini de tirages.** Pour $n \geq 1$, on note B_n l'événement : "Les n premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boules noires". On note $u_n = P(B_n)$.

   Justifier que la suite (u_n) est convergente, puis, montrer que : $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

2. **Étude à l'infini.** On note B_∞ l'évènement "l'expérience ne s'arrête jamais".

   a. Montrer que $P(B_\infty) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

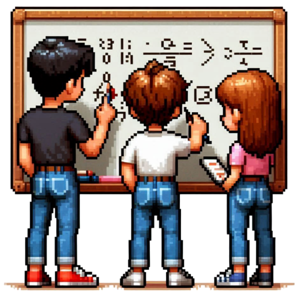
   b. Montrer que $-\ln(u_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$. Conclure que $P(B_\infty) > 0$.

Exercice 2

On lance (indéfiniment) des boules de neige sur la porte d'un voisin grincheux. À chaque tir, la probabilité de toucher la sonnette vaut $p \in]0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note A_n l'évènement "on touche consécutivement deux fois la sonnette pour la première fois avec le n-ième lancer". On note $a_n = P(A_n)$.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3.
2. À l'aide d'un système complet d'évènements représentant les premiers lancers, et une formule du cours que l'on nommera, montrer que
$$a_{n+2} = (1-p)a_{n+1} + p(1-p)a_n$$
3. On note A l'évènement "on touche deux fois de suite la sonnette" et $S = P(A)$.
   a. Exprimer A à l'aide des A_n.
   b. Exprimer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+2}$ en fonction de S, a_1 et a_2.
   c. Montrer que $S = 1$. Que peut-on en conclure?

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°13

Du Lundi 16 Décembre au Vendredi 20 Décembre
Planche n°2

Question de cours

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exercice 1

On veut photocopier un polycopié de math d'excellente qualité de n pages. Malheureusement un mauvais réglage mélange toutes les feuilles (originales et copies - qu'on ne peut distinguer) dans le bac de sortie. On alors tire au hasard deux feuilles et on regarde les deux numéros de pages correspondantes.

1. Combien y a-t-il tirages différents de couples de feuilles ?
2. Combien de tirages sont composés d'un orignal et de sa copie?
3. Quelle est donc, en fonction de n, la probabilité de piocher un original et sa copie ?

Exercice 2

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec probabilité p et *Face* avec probabilité $q = 1 - p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
On dit que le $k-$ième lancer est un *changement* s'il amène un résultat différent du $(k-1)-$ième lancer.
On introduit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les évènements

- ✗ P_k (resp. F_k) "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k-$ième lancer;
- ✗ Z_k "il y a un changement au $k-$ième lancer (avec $k \geq 2$);
- ✗ $X_{n,k}$ "il y a k changements au cours des n premiers lancers" (avec $0 \leq k \leq n-1$) et $n \geq 1$)

1. Exprimer à l'aides des P_i et F_i les évènements Z_2 et Z_3.
En déduire les valeurs de $P(Z_2)$ et $P(Z_3)$.

2. Dans cette question uniquement on suppose que $n = 2$. Déterminer rigoureusement $P(X_{2,k})$ pour $k = 0$ et $k = 1$.

3. Dans cette question uniquement on suppose que $n = 3$. Déterminer rigoureusement $P(X_{3,k})$ pour $0 \leq k \leq 2$.

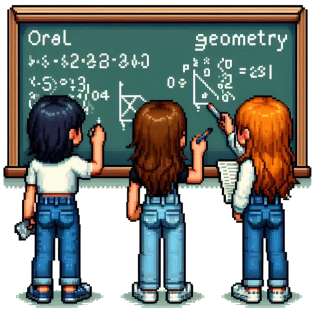
4. Dans toute la suite on suppose $q \neq q$.

a. Montrer rigoureusement que $P(X_{n,0}) = p^n + q^n$.
On commencera par décrire $X_{n,0}$ avec des intersections de P_i et F_i.

b. Déterminer $P(X_{n,1})$.
c. En distinguant n pair et n impair, déterminer $P(X_{n,n-1})$.

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°13

Du Lundi 16 Décembre au Vendredi 20 Décembre
Planche n°3

Question de cours

Un sportif s'entraîne aux tirs aux buts avec une succession, infinie, d'essais. À chacune de ses tentatives, supposées indépendantes, la probabilité de marquer vaut p (où $p \in]0,1[$ est un paramètre fixé). Montrer, de deux manières différentes que, presque sûrement, le sportif marque un but.

Exercice 1

1. Démontrer qu'il existe une unique probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{n\}) = (1-a)a^n$.
2. On considère les deux événements $A = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$. Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? indépendants?

Exercice 2

Le père Noël prépare le chargement de sa hotte d'or en la remplissant de cadeaux provenant de ses sites de fabrication délocalisés dans les pays du Sud où la main d'oeuvre des lutins locaux (parfois mineurs et travaillant dans des conditions qui ne respectent pas vraiment l'esprit de Noël) lui coûte moins cher.

Du haut de son traineau magique, il se déplace aléatoirement entre les quatre usines, numérotées de 1 à 4 selon le protocole suivant :

- ✗ Au départ, c'est à dire à l'instant 0, l'homme en rouge est sur le site numéro 1 .
- ✗ Lorsqu'il se trouve, à un instant donné sur un site, il se déplace à l'instant suivant sur l'un des trois autres sites, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements :

- ✗ A_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 1 à l'instant n";
- ✗ B_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 2 à l'instant n";
- ✗ C_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 3 à l'instant n";
- ✗ D_n: "Santa se trouve sur le site de l'usine numéro 4 à l'instant n";

et a_n, b_n, c_n, d_n les probabilités correspondantes. En particulier, on a $a_0 = 1$ et $b_0 = c_0 = d_0 = 0$.

1. Déterminer a_1, b_1, c_1 et d_1.
   On admet pour la suite que
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n)$$

b. Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
c. En explicitant un lien entre a_n, b_n, c_n et c_n, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}.$$

d. Établir alors que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

2. **a**. En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + c_n + d_n\right)$$

b. En déduire une relation entre b_{n+1} et b_n.
c. Montrer enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a

$$c_{n+1} = -\frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad d_{n+1} = -\frac{1}{3}d_n + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = d_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Colle PT – 13 **Jeudi 19 Janvier 2024**

A] **<u>Question de cours :</u>**

Formules des probabilités totales (versions 1 et 2). Énoncés avec hypothèses clairement formulées.

<u>Exercices :</u>

1) On considère un jeu de 52 cartes et on tire au hasard 6 cartes de ce jeu.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux coeurs ?
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un cœur et exactement un roi ?

2)

Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager 2 cas : avec ou sans remise)
2. Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour là ?

B] **<u>Question de cours :</u>**

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé (Ω, T, P).
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

<u>Exercices :</u>

1)

Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre d'un triangle ABC selon le protocole suivant :
* Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité 0.75 et en C avec la probabilité 0.25.
* Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en B, elle se fixe à l'instant suivant en A avec la probabilité 0.75 et en C avec la probabilité 0.25.
* Si à un instant donné, elle se situe en C, elle ira systématiquement en B à l'instant suivant.

On note a_n, b_n et c_n les probabilités qu'à l'instant n, la particule se situe en A, B ou C.

a) Déterminer des relations de récurrence entre a_n, b_n et c_n et a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} .
b) En déduire l'existence d'une matrice carrée d'ordre 3, notée M, telle que :
$^t(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = M \times {}^t(a_n\ b_n\ c_n)$ puis que : $^t(a_n\ b_n\ c_n) = M^n \times {}^t(a_0\ b_0\ c_0)$.
c) Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1} \times M \times P$.
d) En déduire l'expression en fonction de n, de M^n puis de a_n , b_n et c_n .
e) Calculer les limites quand n tend vers l'infini des probabilités a_n , b_n et c_n .

2) Reprise d'une question du DS

C] **Question de cours :**

Un sportif s'entraîne aux tirs aux buts avec une succession, infinie, d'essais. À chacune de ses tentatives, supposées indépendantes, la probabilité de marquer vaut p (où p ∈]0, 1[est un paramètre fixé).

Montrer, de deux manières différentes que, presque sûrement, le sportif marque un but.

Exercices :

1)

On considère une particule qui se dépose à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle en suivant les règles ci-dessous :

- À la première seconde, la particule se pose au hasard sur l'un des trois sommets.
- Si la particule se trouve en B, elle y reste.
- Si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de manière équiprobable.
- Si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois et elle va en B avec une probabilité 7 fois plus forte qu'en A.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n (resp. B_n, resp. C_n) l'évènement « à la n-ème seconde, la particule se trouve en A (resp. B, resp. C) », et on note a_n (resp. b_n, resp. c_n) la probabilité de A_n (resp. B_n, resp. C_n).

1. Que valent a_1, b_1 et c_1 ?
2. Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n pour tout $n \geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire double, puis en déduire la valeur explicite de c_n pour tout $n \geqslant 1$.
4. En déduire les valeurs de a_n et de b_n pour tout $n \geqslant 1$.
5. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

2) Reprise d'une question du DS