Colle PT – 13 **Jeudi 19 Janvier 2024**

A] **Question de cours :**

Formules des probabilités totales (versions 1 et 2). Énoncés avec hypothèses clairement formulées.

Exercices :

1) On considère un jeu de 52 cartes et on tire au hasard 6 cartes de ce jeu.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux coeurs ?
Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un cœur et exactement un roi ?

2)

Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager 2 cas : avec ou sans remise)
2. Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour là ?

B] **Question de cours :**

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé (Ω, T, P).
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Exercices :

1)

Une particule se déplace à chaque seconde d'un sommet à l'autre d'un triangle ABC selon le protocole suivant :

* Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en A, elle se fixe à l'instant suivant en B avec la probabilité 0.75 et en C avec la probabilité 0.25.
* Lorsqu'à un instant donné, elle se situe en B, elle se fixe à l'instant suivant en A avec la probabilité 0.75 et en C avec la probabilité 0.25.
* Si à un instant donné, elle se situe en C, elle ira systématiquement en B à l'instant suivant.

On note a_n, b_n et c_n les probabilités qu'à l'instant n , la particule se situe en A, B ou C.

a) Déterminer des relations de récurrence entre a_n, b_n et c_n et a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} .
b) En déduire l'existence d'une matrice carrée d'ordre 3, notée M, telle que :
${}^t(a_{n+1}\ b_{n+1}\ c_{n+1}) = M \times {}^t(a_n\ b_n\ c_n)$ puis que : ${}^t(a_n\ b_n\ c_n) = M^n \times {}^t(a_0\ b_0\ c_0)$.
c) Soit P la matrice $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1} \times M \times P$.
d) En déduire l'expression en fonction de n, de M^n puis de a_n , b_n et c_n .
e) Calculer les limites quand n tend vers l'infini des probabilités a_n , b_n et c_n .

2) Reprise d'une question du DS

Colle PT – 13 **Jeudi 19 Janvier 2024**

C] **<u>Question de cours :</u>**

Un sportif s'entraîne aux tirs aux buts avec une succession, infinie, d'essais. À chacune de ses tentatives, supposées indépendantes, la probabilité de marquer vaut p (où $p \in]0, 1[$ est un paramètre fixé).

Montrer, de deux manières différentes que, presque sûrement, le sportif marque un but.

<u>Exercices :</u>

1)

On considère une particule qui se dépose à chaque seconde sur l'un des trois sommets A, B et C d'un triangle en suivant les règles ci-dessous :

- À la première seconde, la particule se pose au hasard sur l'un des trois sommets.
- Si la particule se trouve en B, elle y reste.
- Si la particule se trouve en A, elle se trouve à la seconde suivante sur l'un des trois sommets de manière équiprobable.
- Si la particule se trouve en C, à la seconde suivante, elle y reste une fois sur trois et elle va en B avec une probabilité 7 fois plus forte qu'en A.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note A_n (resp. B_n, resp. C_n) l'évènement « à la n-ème seconde, la particule se trouve en A (resp. B, resp. C) », et on note a_n (resp. b_n, resp. c_n) la probabilité de A_n (resp. B_n, resp. C_n).

1. Que valent a_1, b_1 et c_1 ?
2. Donner une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et a_n, b_n, c_n pour tout $n \geqslant 1$.
3. Montrer que la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire double, puis en déduire la valeur explicite de c_n pour tout $n \geqslant 1$.
4. En déduire les valeurs de a_n et de b_n pour tout $n \geqslant 1$.
5. Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ et $(c_n)_{n\geqslant 1}$.

2) Reprise d'une question du DS