Colle PT – 14 **Jeudi 09 Janvier 2025**

A] **Question de cours :**

Énoncé et démonstration du lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Dessin explicatif.
Explication des conséquences du lemme sur la détermination du rayon de convergence.

Exercices :

1) Une course oppose 20 concurrents.
a) Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
b) On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un livre.
Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_n = \dfrac{2n}{(2n+1)!}$.

3) Développer en série entière $x \mapsto \sin^2 x \cos x$. Préciser le rayon de convergence.

B] **Question de cours :**

Déterminer, en détaillant les précautions prises, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1} z^{2n}$

Exercices :

1)

Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager 2 cas : avec ou sans remise)
2. Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour là ?

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ avec $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n n!}$.

3) Pour tout entier n non nul et x$\in]-R;R[$, on pose : $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$
a) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.
b) Déterminer $a_n - a_{n-1}$ pour n>1 et en déduire une expression simple de f(x).

C] **Question de cours :**

Énoncé des théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme.

Application : Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Exercices :

1)

On dispose d'un dé équilibré et de deux urnes. L'urne U_1 contient deux jetons blancs et un jeton rouge. L'urne U_2 contient un jeton blanc et deux jetons rouges.

On lance le dé jusqu'à obtenir pour la première fois un six. Si le numéro du lancer pour lequel on a obtenu le premier six est pair on tire au hasard un jeton dans l'urne U_1 sinon on tire un jeton dans l'urne U_2.

On note A_n l'événement ≪ obtenir un six pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer ≫, S_k l'événement ≪ obtenir six au $k^{\text{ème}}$ lancer ≫, et B l'événement ≪ obtenir un jeton blanc ≫.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement A_n.
2. En déduire la valeur de $P(B)$.

2) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{65537}\right) z^n$?

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

4)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrez A admet 3 valeurs propres distinctes que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.

2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)\, x^n$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour DUSSART Hugo
le mar. 7 janv. 25

Semaine 14

Probabilités – Séries entières

Question de cours. Énoncer les théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme des séries entières.
Puis déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 1. Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Montrer que

A et B sont indépendants
si et seulement si
$$\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \times \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \times \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}).$$

Exercice 2.

Élements de correction
DUSSART Hugo

Exercice 1. L'implication est triviale, et en traitant la réciproque, on peut s'apercevoir que l'on peut manier des équivalences.
En toute généralité,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
\text{et } \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
\text{et } \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) &= 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
\text{donc } \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \times \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)(\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)) \\
&= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B)(\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) - 1) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) \times \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) + (\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))
\end{aligned}$$

On a donc immédiatement A et B sont indépendants $\iff \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) \iff \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \times \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B) \times \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour JONARD Thibault
le mar. 7 janv. 25

Semaine 14

Probabilités – Séries entières

Question de cours. Déterminer, en détaillant les précautions prises, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1} z^{2n}$.

Exercice 1. Camille propose à Dominique le jeu suivant : tirer sans remise 5 cartes parmi 52. Si l'as de trèfle est dans ces 5 cartes, Dominique gagne.

1. Quelle est la probabilité que Dominique gagne ?
2. Camille décide de tricher et retire t cartes au hasard (avec $1 \leqslant t \leqslant 46$).
   - **a.** Quelle est la probabilité que Dominique gagne ?
   - **b.** Sachant que Dominique a perdu, quelle est la probabilité que Camille ait enlevé l'as de trèfle ?

Exercice 2.

Élements de correction

JONARD THIBAULT

Exercice 1.

1. Il y a $\binom{52}{5}$ mains de 5 cartes, dont $\binom{51}{4}$ contenant l'as de trèfle. Donc, pour Dominique,la probabilité de gagner est de $\frac{\binom{51}{4}}{\binom{52}{5}} = \frac{5}{52} \approx 9.6\%$.
2. On note X_t l'évènement : l'as de trèfle fait partie des t cartes retirées par Camille. Ce retrait étant fait au hasard (uniformément parmi les 52 cartes), $\mathbb{P}[X_t] = \frac{\binom{51}{t-1}}{\binom{52}{t}} = \frac{t}{52}$.

   Or $\mathbb{P}[\text{ Dominique gagne}|X_t] = 0$ et $\mathbb{P}[\text{ Dominique gagne}|\overline{X_t}] = \frac{\binom{51-t}{4}}{\binom{52-t}{5}} = \frac{5}{52-t}$. Ainsi $\mathbb{P}[\text{ Dominique gagne}] = 0 + \left(1 - \frac{t}{52}\right)\frac{5}{52-t} = \frac{5}{52}$.
3. Conditionnellement à {Dominique perd}, la probabilité que l'as de trèfle ait été retiré est donné par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}[X_t|\text{ Dominique perd}] = \frac{\mathbb{P}[\text{ Dominique perd}|X_t].\mathbb{P}[X_t]}{\mathbb{P}[\text{ Dominique perd}]}$$
$$\frac{\frac{t}{52}}{1 - \mathbb{P}[\text{ Dominique gagne}]} = \frac{t}{47}$$

   car conditionnellement à X_t (= l'as de trèfle est retiré), la probabilité que Dominique perde est de 1.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour MORANDINI Stefanu
le mar. 7 janv. 25

Semaine 14

Probabilités – Séries entières

Question de cours. Énoncer et démontrer le lemme d'Abel. Puis donner la définition du rayon de convergence et préciser les conséquences du lemme d'Abel sur la détermination du rayon de convergence.

Exercice 1. Une urne contient initialement 3 boules bleues et 1 boule rouge.
On effectue des tirages successifs de la façon suivante : après le k-ième tirage, on remet la boule tirée et on rajoute une quantité $\mathrm{Q}_k = 2k+3$ de boules de la même couleur.

On note
- pour tout entier $k \geqslant 1$, B_k l'évènement « la boule tirée au k-ième tirage est bleue » ;
- pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathrm{A}_n = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k$, et a_n est la probabilité de A_n.

1. Combien y a-t-il de boules au total dans l'urne au moment du k-ième tirage ?

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, où $u_k = \frac{k+1}{k}$.

3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 2.

Élements de correction
MORANDINI STEFANU

Exercice 1.

- Par une récurrence facile, on établit qu'il y a $(k+1)^2$ boules dans l'urne au moment du k-ième tirage.
- Par la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1)\times\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\times\cdots\times\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n)$.

  Or, pour un entier $k \geqslant 2$, sachant $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$, il y a $(k+1)^2 - 1$ boules blanches dans l'urne donc $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}$ (valable aussi pour $k = 1$). On en déduit que $a_n = \mathbb{P}(A_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}$.

  On vérifie que $\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2} = \frac{u_{k+1}}{u_k}$,ce qui fait apparaître un télescopage : $a_n = \frac{1}{2} \times \frac{n+2}{n+1}$.
- Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 2.