Colle PT – 15 **Jeudi 16 Janvier 2025**

A] Question de cours :

Résoudre, sur R, l'équation différentielle : $t^2 y' + y = 1$.

Exercices :

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ avec $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n n!}$.

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est développable en série entière autour de 0 et donner ce DSE.

B] Question de cours :

Déterminer, en détaillant les précautions prises, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\sqrt{n}}{2n+1} z^{2n}$

Exercices :

1) Développer en série entière $x \mapsto \sin^2 x \cos x$. Préciser le rayon de convergence.

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto (\arcsin x)^2$ est développable en série entière autour de 0 et donner ce DES.

C] Question de cours :

Résoudre, sur R, l'équation différentielle : $y'' - 4y' + 3y = x^2e^x + xe^{2x}\cos(x)$.

Exercices :

1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \cos\left(\dfrac{2n\pi}{65537}\right) z^n$?

2) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

3)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrez A admet 3 valeurs propres distinctes que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.

2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)\, x^n$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour KIKHAY Arseniy
le mar. 14 janv. 25

Semaine 15

Séries entières – Équations différentielles

Question de cours. Énoncer les théorèmes de dérivation et d'intégration terme à terme des séries entières.
Puis déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 1. Résoudre sur tout intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes, d'inconnue $y\colon x \mapsto y(x)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

1. $(1+x^2)y' - 2x\,y = x^2$

2. $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

Exercice 2.

Élements de correction
KIKHAY Arseniy

Exercice 1.

- Solution homogène $y_{\mathrm{H}}(x) = \mathrm{C}(1+x^2)$. Puis variation de la constante $\implies$ $\mathrm{C}'(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(1+x^2)^2} \times x$, que l'on intègre par parties, avec $v' = \frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x^2})'$ et $u = x$. Il vient que $\mathrm{C}(x) = [-\frac{x}{2(1+x^2)}] + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x$, puis que $y(x) = (-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + \mathrm{C})(1+x^2)$.
- Racine double de l'équation caractéristique $= -1$, donc la solution homogène est de la forme $y(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$. Puisque l'exponentielle du second membre a le même coefficient -1, on recherche une solution particulière de la forme $y(x) = cx^2\mathrm{e}^{-x}$, ce qui conduit à $c = \frac{1}{2}$. Donc la solution générale est $y(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x} = (\frac{x^2}{2} + ax + b)\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour MARANCHON François
le mar. 14 janv. 25

Semaine 15

Séries entières – Équations différentielles

Question de cours. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 3y = x^2 e^x + x e^{2x} \cos(x)$$

Exercice 1.
Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{sh}(n) x^{2n}$.

Exercice 2.

Élements de correction
MARANCHON FRANÇOIS

Question de cours.
Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x}$.
Puis on applique le principe de superposition :

- On cherche une première solution particulière sous la forme $y_1(x) = e^x \times x \times (ax^2 + bx + c)$ et on trouve $a = -\frac{1}{6}$ et $b = c = -\frac{1}{4}$.
- Et puisque $xe^{2x}\cos(x) = \text{Re}\left(xe^{(2+i)x}\right)$, on cherche une deuxième solution particulière sous la forme $(ax+b)e^{(2+i)x}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. Après moultes calculs, on trouve $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{i}{2}$ et on prend la partie réelle de cette solution : $y_2(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}\left(x\cos(x) - \sin(x)\right)$.

Au final, les solutions de l'équation sont de la forme $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x} - e^x(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}) - \frac{1}{2}e^{2x}\left(x\cos(x) - \sin(x)\right)$.

Exercice 1.
• La série est lacunaire, donc la règle de d'Alembert doit être maniée finement. On a $\left|\frac{\text{sh}(n+1)x^{2n+2}}{\text{sh}(n)x^{2n}}\right| \sim \frac{e^{n+1}}{e^n}x^2 = ex^2$ donc ce terme admet une limite < 1 si et seulement si $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$. Donc le rayon vaut $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
• Pour $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$, $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} e^n (x^2)^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0} e^{-n}(x^2)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-ex^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-1}x^2}$, et on ne peut guère simplifier plus.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour LOMBARD Titouan
le mar. 14 janv. 25

Semaine 15

Séries entières – Équations différentielles

Question de cours. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$t^2y' + y = 1$$

Exercice 1.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle *polylogarithme d'ordre k* la fonction définie par

$$\mathrm{Li}_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^k}$$

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le domaine de définition de Li_k.
2. Exprimer Li_1 à l'aide de fonctions usuelles, puis donner une relation fonctionnelle entre Li_{k+1} et Li_k, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. On admet que $\mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$: calculer $\mathrm{Li}_2(-1)$.

Exercice 2.

Élements de correction
LOMBARD Titouan

Exercice 1.
• Le RdC de la série entière définissant Li_k est clairement 1 (règle de d'Alembert). La convergence en -1 est assurée par le CSSA pour tout $k \geqslant 1$ et celle en 1 est assurée par la convergence de la série de Riemann dès que $k \geqslant 2$. Ainsi le domaine de définition de pour Li_k est $[-1\,,1[$ si $k = 1$ et $[-1\,,1]$ si $k \geqslant 2$.
• On reconnaît $\mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x)$. Et par dérivation sur l'intérieur du disque de convergence, $\mathrm{Li}'_{k+1}(x) = \frac{1}{x} \times \mathrm{Li}_k(x)$: ainsi, Li_{k+1} est la primitive de $x \mapsto \frac{\mathrm{Li}_k(x)}{x}$ qui s'annule en 0 (où on a prolongé par continuité cette fonction en 0, de sorte à avoir une fonction continue donc primitivable).
• On constate que $\mathrm{Li}_2(-1) = -\mathrm{Li}_2(1) + 2 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ (on rajoute deux fois les termes de rang pair) $= -\mathrm{Li}_2(1) + 2 \times \frac{\mathrm{Li}_2(1)}{4} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 2.