Semaine de colle 16
Planche 1

Question de Cours.
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ (et sur $\mathbb{R}_-^*$) l'équation différentielle

$$t^2y'' + 4ty' + (2 - t^2)y = 1$$

en posant $z\colon t \mapsto t^2y(t)$. Étudier le recollement en 0.

Exercice 1.
Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = (-1)^X$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2.
On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon y'' - 2xy' - 2y = 0$$

1. Déterminer une fonction f développable en série entière solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Semaine de colle 16
Planche 2

Question de Cours.

Déterminer, en cherchant la solution sous forme d'une fonction développable en série entière, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + xy' + y &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Exercice 1.

Soit $p \in]0;1[$ et X une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \lfloor \frac{X+1}{2} \rfloor$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2.

On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon t^2 y'' + ty' - y = 1$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation homogène (H) associée.
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Semaine de colle 16
Planche 3

Question de Cours.
Soient $p \in]0;1[$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.

Exercice 1.
On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = 0$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E).
2. Identifier la somme des séries obtenues.
3. En déduire toutes les solutions de cette équation différentielle en précisant l'intervalle choisi.

Colle PT – 16 **Jeudi 23 Janvier 2025**

A] **Questions de cours :**

Résoudre sur $\mathbb{R}^{*+}$ (et sur $\mathbb{R}^{*-}$) l'équation différentielle : $t^2y''+ 4ty'+ (2-t^2)y = 1$ en posant $z : t \to t^2y(t)$. Étudier le recollement en 0.

Exercices :

1)

On dispose d'un dé équilibré et de deux urnes. L'urne U_1 contient deux jetons blancs et un jeton rouge. L'urne U_2 contient un jeton blanc et deux jetons rouges.

On lance le dé jusqu'à obtenir pour la première fois un six. Si le numéro du lancer pour lequel on a obtenu le premier six est pair on tire au hasard un jeton dans l'urne U_1 sinon on tire un jeton dans l'urne U_2.

On note A_n l'événement ≪ obtenir un six pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer ≫, S_k l'événement ≪ obtenir six au $k^{\text{ème}}$ lancer ≫, et B l'événement ≪ obtenir un jeton blanc ≫.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement A_n.
2. En déduire la valeur de $P(B)$.

2)

Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager 2 cas : avec ou sans remise)
2. Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour là ?

B] **Questions de cours :**

Soient $p \in]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X > k)$.

Exercices :

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est développable en série entière autour de 0 et donner ce DSE.

2)

Chez les pharaons de l'ancien empire, les mariages consanguins ont développé un risque de stérilité. A partir du fondateur de la dynastie, on note X le nombre de générations précédant l'extinction de la dynastie par stérilité.

On suppose que la loi de probabilité de la variable aléatoire X vérifie la relation

$$3P(X = n + 2) = 4P(X = n + 1) - P(X = n)$$

a) Déterminer la loi de probabilité de X

b) Quelle est la loi connue suivie par la variable Y=X+1 ?

C] **Questions de cours :**

Déterminer, en cherchant la solution sous forme d'une fonction développable en série entière, la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercices :

1)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X = n) = \alpha P(X \geqslant n).$$

1. Démontrer que la suite $(P(X = n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
2. En déduire la loi de la variable X.
3. Déterminer alors la loi de la variable $Y = 1 + X$.
4. En déduire, avec un minimum de calculs, que X admet une espérance et une variance et donner leurs valeurs.

2) Développer en série entière $x \mapsto \sin^2 x \cos x$. Préciser le rayon de convergence.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

4)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Montrez A admet 3 valeurs propres distinctes que l'on ne calculera pas mais dont on déterminera les parties entières.

2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de $x \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)\, x^n$.