Semaine de colle 17
Planche 1

Question de Cours.

Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$) indiscernables au toucher et toutes de couleurs différentes. La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre 0 et les autres sont numérotées de 1 à n. On extrait simultanément une *poignée* de n boules de cette urne. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i est dans la poignée et 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X_i ? Préciser $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$.
   Calculer, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.
   Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
3. Soit Z est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules portant le chiffre 0.
   Calculer $E(Z)$. Comment calculer $V(Z)$?

Exercice 1.

Un joueur jette une pièce non équilibrée (de probabilité p d'obtenir pile) jusqu'à ce qu'il obtienne pile. Si on appelle k le rang du jet où il obtient pile, il doit ensuite lancer k fois de suite un dé équilibré. Il gagne s'il obtient exactement un 6.

Le but est d'obtenir la probabilité de l'évènement G : “le joueur gagne le jeu”.

1. Décrire deux variables aléatoires de lois usuelles représentant les deux étapes de ce jeu.
2. Décrire l'évènement G à l'aide des variables aléatoires introduites plus haut.
3. En déduire une expression de $P(G)$ en fonction de p sous la forme d'une série entière.
4. Identifier la série obtenue et calculer $P(G)$.

Semaine de colle 17
Planche 2

Question de Cours.
Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant chacune une variance. Montrer que

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Exercice 1.
Un magasin veut gérer son stock d'un produit. Le nombre de clients arrivant dans son magasin pendant une journée est supposé suivre une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$. Chaque client achète le produit concerné avec la probabilité p. On note N la variable aléatoire représentant le nombre de client sur une journée, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la probabilité que le n–ème client achète le produit. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire représentant le nombre total de produits achetés.

1. Quelle loi suivent les X_i ? Que représente leur somme X et quelle loi suit-elle ?
2. Décrire les évènements $(T = k)$, pour $k \in \mathbb{N}$ à l'aides des variables aléatoires introduites précédemment.
3. En déduire la loi de probabilité suivie par T. Identifier la réponse obtenue à l'aide des lois usuelles.

Semaine de colle 17
Planche 3

Question de Cours.

Soient $(\Omega,\mathcal{T},P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On considère la matrice aléatoire M définie comme suit. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & X(\omega) & 1 \\ 1 & X(\omega)+Y(\omega) & 0 \\ 0 & Y(\omega) & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 1.

Soit $p \in]0,1[$ et (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \ P([X=n] \cap [Y=k]) = \begin{cases} p^2(1-p)^k \text{ si } k \geq n \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Rappeler la formule permettant d'obtenir les lois marginales d'un couple de variables aléatoires (X,Y).
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Quelle est la loi de $X+1$? En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
3. Montrer que X et $Y-X$ suivent la même loi.
4. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes. En déduire $\mathrm{Cov}(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Colle PT – 17
Jeudi 30 Janvier 2025

A] **Question de cours :**

Reproduire le tableau des lois usuelles.

Exercices :

1) Soit n un entier naturel non nul et λ un réel positif. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans [[1 ; n]] et dont la loi est de la forme : $P(X=k)= \lambda k$.
Déterminer λ puis calculer E(X) et V(X).

2)

Chez les pharaons de l'ancien empire, les mariages consanguins ont développé un risque de stérilité. A partir du fondateur de la dynastie, on note X le nombre de générations précédant l'extinction de la dynastie par stérilité.
On suppose que la loi de probabilité de la variable aléatoire X vérifie la relation

$$3P(X=n+2) = 4P(X=n+1) - P(X=n)$$

a) Déterminer la loi de probabilité de X
b) Quelle est la loi connue suivie par la variable Y=X+1 ?

3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la probabilité que la valeur de X soit paire.

B] **Question de cours :**

Calculer la série génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$.

Exercices :

1) Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la loi est donnée par $P(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

2) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètres respectifs 1/6 et 5/6. Déterminer P(X=Y).

3)

On dispose d'un dé équilibré et de deux urnes. L'urne U_1 contient deux jetons blancs et un jeton rouge. L'urne U_2 contient un jeton blanc et deux jetons rouges.

On lance le dé jusqu'à obtenir pour la première fois un six. Si le numéro du lancer pour lequel on a obtenu le premier six est pair on tire au hasard un jeton dans l'urne U_1 sinon on tire un jeton dans l'urne U_2.

On note A_n l'événement « obtenir un six pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer », S_k l'événement « obtenir six au $k^{\text{ème}}$ lancer », et B l'événement « obtenir un jeton blanc ».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement A_n.
2. En déduire la valeur de $P(B)$.

Colle PT – 17
Jeudi 30 Janvier 2025

C] **Question de cours :**

Soients $p\in]0,1[$ et $X \sim G(p)$.

a) Calculer, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X > k)$.

b) Obtenir de deux façons la valeur de $E(X)$.

c) On pose $Y = 1/X$. Calculer, à l'aide du meilleur théorème du cours, $E(Y)$.

Exercices :

1) Soit n un entier naturel non nul et λ un réel. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $[[1 ; 2n-1]]$ et dont la loi est de la forme :

Pour k dans $[[1 ; n]]$: $P(X=k)= \lambda k$ et pour k dans $[[n+1 ; 2n-1]]$: $P(X=k)= \lambda(2n-k)$.

a) Déterminer λ.

b) En admettant que X et 2n-X ont la même loi, déterminer $E(X)$.

c) Calculer $E(X^2)$. En déduire $V(X)$.

2) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $B(n,p)$.
On pose : $Z = X+Y$. Déterminer la loi de X sachant $(Z=n_0)$.

3) On considère deux varaibles aléatoires indépendantes suivant le même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z définie par : $Z = \max(X,Y)$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour DJOMATCHOUA Fidèle
le mar. 28 janv. 25

Semaine 17

Variables aléatoires

Question de cours. Soient $p \in]0\,,1[$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.
2. Obtenir de deux façons la valeur de $E(X)$.
3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 1. On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $p-1$ boules noires et l'urne V contenant $p-1$ boules blanches et une boule noire (où p est un entier fixé, $p \geqslant 2$).
Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage et il effectue des tirages avec remise de la boule dans l'urne dont elle provient, selon le protocole suivant :

- s'il a obtenu une boule noire, il effectue le tirage suivant dans l'urne V ;
- et s'il a obtenu une boule blanche, il effectue le tirage suivant dans l'urne U.

NB : ce protocole s'applique à tous les tirages ultérieurs.
On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche.

1. Calculer $P(X = 1)$.
2. Établir que, pour $n \geqslant 2$, $P(X = n) = \dfrac{p-1}{2}\left(\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$.
3. Justifier que X admet une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 2.

Élements de correction
DJOMATCHOUA FIDÈLE

Exercice 1.
On note U l'événement «Choisir l'urne U au départ» et N_n (resp. B_n) l'événement «Obtenir Blanc (resp. Noir) au n-ième tirage».
• On partitionne selon $(U, \overline{U})$ pour obtenir $\mathbb{P}(X = 1) = 0,5$ par probas totales et probas composées.
• Pour $n \geqslant 2$, conditionnellement à $X = n$, les $n-1$ premières boules sont noires : hormis le premier tirage, tous les autres ont donc eu lieu dans l'urne V, ce qui s'écrit formellement $\{X = n\} = (U \cap N_1 \cap \ldots N_{n-1} \cap B_n) \cup (V \cap N_1 \cap \ldots N_{n-1} \cap B_n)$. Alors $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2}\frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-2}\frac{p-1}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}\frac{p-1}{p} = \frac{p-1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}$ (après simplification).
• En écrivant $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(X = n)$, on reconnait une série géométrique dérivée donc $\mathbb{E}(X)$ est bien définie. On obtient $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} + \frac{p-1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2} - 1\right) = \frac{3p-2}{2(p-1)}$.

Exercice 2.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Pour LAOUFI RAYAN
le mar. 28 janv. 25

Semaine 17

Variables aléatoires

Question de cours. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant chacune une variance. Montrer que

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Exercice 1. On effectue des tirages successifs dans une urne contenant initialement une boule noire et une boule blanche. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée puis on la remet dans l'urne en ajoutant une boule noire.
On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule noire, et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. **a.** Déterminer la loi de Y.

   b. Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

2. **a.** Déterminer la loi de Z.

   b. Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2.

Élements de correction

LAOUFI Rayan

Exercice 1.
On note respectivement B_k et N_k les événements « Blanc au k-ième tirage » et « Noir au k-ième tirage ». Au moment d'effectuer le k-ième tirage, il y a 1 boule blanche et k boules noires donc $\mathbb{P}(\mathrm{B}_k) = \frac{1}{k+1}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{N}_k) = \frac{k}{k+1}$.
• $\mathrm{Y}(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, $(\mathrm{Y} = n) = \cap_{k=1}^{n-1} \mathrm{B}_k \cap \mathrm{N}_n$ donc, par probilités composées, $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = n) = \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}$.
La série de TG $n \times \frac{n}{(n+1)!}$ est bien convergente (d'Alembert). En écrivant (ruse !) $n^2 = (n+1-1)^2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1$, il vient que $\frac{n^2}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$. Alors $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} - \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \mathrm{e} - 1$ (par téléscopage).
• $\mathrm{Z}(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, $(\mathrm{Y} = n) = \cap_{k=1}^{n-1} \mathrm{N}_k \cap \mathrm{B}_n$ donc, par probilités composées, $\mathbb{P}(\mathrm{Z} = n) = \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ (par télescopage). Il est alors clair que Z n'admet pas d'espérance.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour SADADOU Erwan
le mar. 28 janv. 25

Semaine 17

Variables aléatoires

Question de cours. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in \,]0,1[$. On considère la matrice aléatoire M définie comme suit. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X}(\omega) & 1 \\ 1 & \mathrm{X}(\omega) + \mathrm{Y}(\omega) & 0 \\ 0 & \mathrm{Y}(\omega) & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 1.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la même loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{2}\right)$.
On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
2. On veut déterminer la loi de Z.
   - **a.** On pose $\mathrm{T} = \mathrm{Z} + 3$. En écrivant $\mathrm{T} = \mathrm{X} + (3 - \mathrm{Y})$, déterminer avec un minimum de calcul la loi de T.
   - **b.** En déduire la loi de Z.
3. X et Z sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$.

Exercice 2.

Élements de correction
SADADOU ERWAN

Exercice 1.
• On peut noter que $Z(\Omega) = [\![-3\,,3]\!]$ est borné donc Z admet une espérance. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y) = 0$ et $V(Z) = V(X+(-Y)) = V(X)+(-1)^2V(Y) = \frac{3}{2}$ (par indépendance et par la propriété $V(aX+b) = a^2V(X)$).
• On pose $Y' = 3 - Y$: Y' donne le nombre d'échecs dans un schéma de Bernoulli donc Y' suit une loi $\mathcal{B}\left(3; 1-\frac{1}{2}\right) = \left(3; \frac{1}{2}\right)$.
Alors T, qui est la somme de deux v.a.i. de même loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{2}\right)$, suit une loi $\mathcal{B}\left(3+3; \frac{1}{2}\right)$ car elle représente le nombre de succès quand on répète $3+3 = 6$ fois l'expérience de Bernoulli.
Alors, pour $k \in [\![-3\,,3]\!] = Z(\Omega)$, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(T = 3+k) = \binom{6}{3+k} \times \frac{1}{2^6}$.
• On constate que $\mathbb{P}(Z = 3, X = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(Z = 3) \times \mathbb{P}(X = 0)$ donc les deux v.a. ne sont pas indépendantes.
• $\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathrm{Cov}(X, X-Y) = \mathrm{Cov}(X, X) - \mathrm{Cov}(X, Y) = V(X) - 0$ (par indépendance) $= 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour XXX X
le jeu. 30 janv. 25

Semaine 17

Variables aléatoires

Question de cours. Soient $p \in]0,1[$ et $X \sim \mathcal{G}(p)$.

1. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.
2. Obtenir de deux façons la valeur de $E(X)$.
3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 1. On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $p-1$ boules noires et l'urne V contenant $p-1$ boules blanches et une boule noire (où p est un entier fixé, $p \geqslant 2$).
Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage et il effectue des tirages avec remise de la boule dans l'urne dont elle provient, selon le protocole suivant :

- s'il a obtenu une boule noire, il effectue le tirage suivant dans l'urne V ;
- et s'il a obtenu une boule blanche, il effectue le tirage suivant dans l'urne U.

NB : ce protocole s'applique à tous les tirages ultérieurs.
On note X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule blanche.

1. Calculer $P(X = 1)$.
2. Établir que, pour $n \geqslant 2$, $P(X = n) = \dfrac{p-1}{2}\left(\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$.
3. Justifier que X admet une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 2.

Élements de correction
XXX X

Exercice 1.
On note U l'événement «Choisir l'urne U au départ» et N_n (resp. B_n) l'événement «Obtenir Blanc (resp. Noir) au n-ième tirage».
• On partitionne selon $(U, \overline{U})$ pour obtenir $\mathbb{P}(X = 1) = 0,5$ par probas totales et probas composées.
• Pour $n \geqslant 2$, conditionnellement à $X = n$, les $n-1$ premières boules sont noires : hormis le premier tirage, tous les autres ont donc eu lieu dans l'urne V, ce qui s'écrit formellement $\{X = n\} = (U \cap N_1 \cap \ldots N_{n-1} \cap B_n) \cup (V \cap N_1 \cap \ldots N_{n-1} \cap B_n)$. Alors $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2}\frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-2}\frac{p-1}{p} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}\frac{p-1}{p} = \frac{p-1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}$ (après simplification).
• En écrivant $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(X = n)$, on reconnait une série géométrique dérivée donc $\mathbb{E}(X)$ est bien définie. On obtient $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} + \frac{p-1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2} - 1\right) = \frac{3p-2}{2(p-1)}$.

Exercice 2.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Pour YYY Y
le jeu. 30 janv. 25

Semaine 17

Variables aléatoires

Question de cours. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant chacune une variance. Montrer que

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

Exercice 1. On effectue des tirages successifs dans une urne contenant initialement une boule noire et une boule blanche. À chaque tirage, on note la couleur de la boule tirée puis on la remet dans l'urne en ajoutant une boule noire.
On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule noire, et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. **a.** Déterminer la loi de Y.

   b. Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

2. **a.** Déterminer la loi de Z.

   b. Z admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2.

Élements de correction
YYY Y

Exercice 1.
On note respectivement B_k et N_k les événements « Blanc au k-ième tirage » et « Noir au k-ième tirage ». Au moment d'effectuer le k-ième tirage, il y a 1 boule blanche et k boules noires donc $\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{k+1}$ et $\mathbb{P}(N_k) = \frac{k}{k+1}$.
• $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, $(Y = n) = \cap_{k=1}^{n-1} B_k \cap N_n$ donc, par probilités composées, $\mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}$.
La série de TG $n \times \frac{n}{(n+1)!}$ est bien convergente (d'Alembert). En écrivant (ruse!) $n^2 = (n+1-1)^2 = (n+1)^2 - 2(n+1) + 1$, il vient que $\frac{n^2}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}$. Alors $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(n+1)!} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = e - 1$ (par téléscopage).
• $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, $(Y = n) = \cap_{k=1}^{n-1} N_k \cap B_n$ donc, par probilités composées, $\mathbb{P}(Z = n) = \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ (par télescopage). Il est alors clair que Z n'admet pas d'espérance.

Exercice 2.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Pour ZZZ Z
le jeu. 30 janv. 25

Semaine 17

Variables aléatoires

Question de cours. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in \left]0,1\right[$. On considère la matrice aléatoire M définie comme suit. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X}(\omega) & 1 \\ 1 & \mathrm{X}(\omega) + \mathrm{Y}(\omega) & 0 \\ 0 & \mathrm{Y}(\omega) & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la probabilité que M soit inversible.

Exercice 1.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la même loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{2}\right)$.
On pose $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{Y}$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
2. On veut déterminer la loi de Z.
  - **a.** On pose $\mathrm{T} = \mathrm{Z} + 3$. En écrivant $\mathrm{T} = \mathrm{X} + (3 - \mathrm{Y})$, déterminer avec un minimum de calcul la loi de T.
  - **b.** En déduire la loi de Z.

3. X et Z sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$.

Exercice 2.

Élements de correction
ZZZ Z

Exercice 1.

• On peut noter que $Z(\Omega) = [\![-3\,,3]\!]$ est borné donc Z admet une espérance. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y) = 0$ et $V(Z) = V(X+(-Y)) = V(X)+(-1)^2V(Y) = \frac{3}{2}$ (par indépendance et par la propriété $V(aX+b) = a^2V(X)$).

• On pose $Y' = 3 - Y$: Y' donne le nombre d'échecs dans un schéma de Bernoulli donc Y' suit une loi $\mathcal{B}\left(3; 1-\frac{1}{2}\right) = \left(3; \frac{1}{2}\right)$.

Alors T, qui est la somme de deux v.a.i. de même loi $\mathcal{B}\left(3; \frac{1}{2}\right)$, suit une loi $\mathcal{B}\left(3+3; \frac{1}{2}\right)$ car elle représente le nombre de succès quand on répète $3+3=6$ fois l'expérience de Bernoulli.

Alors, pour $k \in [\![-3\,,3]\!] = Z(\Omega)$, $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(T = 3+k) = \binom{6}{3+k} \times \frac{1}{2^6}$.

• On constate que $\mathbb{P}(Z=3, X=0) = 0 \neq \mathbb{P}(Z=3)\times\mathbb{P}(X=0)$ donc les deux v.a. ne sont pas indépendantes.

• $\mathrm{Cov}(X,Z) = \mathrm{Cov}(X, X-Y) = \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(X,Y) = V(X) - 0$ (par indépendance) $= 3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Exercice 2.