Semaine de colle 18
Planche 1

Question de Cours.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base (u_1, u_2, u_3) où

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (1, 1, 1), \quad u_3 = (-1, -1, 0).$$

Exercice 1.

on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on s'intéresse aux variables sommes S_n et moyennes M_n données par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad\qquad M_n = \frac{S_n}{n}$$

1. Rappeler l'espérance, la variance et la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n et de M_n.
3. Calculer la fonction génératrice G_{S_n} de S_n pour tout $t \in [-1,1]$.
4. Déterminer le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
5. En déduire le développement en série entière de $G_{S_n}(t)$ pour tout $t \in]-1,1[$.
6. Décrire la loi suivie par S_n.
7. (Cette question est indépendante des questions 3 à 5). Appliquer l'inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev à M_n et interpréter leur comportement suivant l'évolution des différents paramètres.

Semaine de colle 18
Planche 2

Question de Cours.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]^2$ par

$$\langle P, Q \rangle \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0 \leq j \leq n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X-a)^j$.

Exercice 1.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est donnée, pour tout $t \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par

$$G_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$$

1. Déterminer la loi suivie par X.
2. Reconnaître la loi suivie par $Y = \frac{1}{2}(X+1)$. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. Retrouver l'espérance et la variance de X directement à l'aide de sa fonction génératrice.

Exercice 2.

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}.$$

Déterminer une base orthonormale de F.

Semaine de colle 18
Planche 3

Question de Cours.

Énoncés précis des inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev.

Application : Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$ et $\alpha \in]0;1[$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Montrer que :

$$P\left(p \notin \left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{1}{4\alpha n}}, \overline{X_n} + \sqrt{\frac{1}{4\alpha n}}\right]\right) \leq \alpha.$$

Exercice 1.

On note $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on définit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

On considère le sous-espace vectoriel $G = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f'' = f\}$ de E.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E et décrire la norme associée.
2. Déterminer une base de G.
3. Montrer que pour tout $f \in E$ et $g \in G$, on a $\varphi(f,g) = f(1)g'(1) - f(0)g'(0)$.
4. Montrer que $G^\perp = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

Exercice 2.

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on définit

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it})Q(e^{-it})dt.$$

1. Montrer que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on a $\varphi(P,Q) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour ROCHE Maëlle
le mar. 4 févr. 25

Semaine 18

Variables aléatoires – Espaces préhilbertiens réels

Question de cours. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Démontrer que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)}{(k!)^2}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Vérifier que la famille $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est orthonormée pour ce produit scalaire, où $P_j(X) = (X - a)^j$.

Exercice 1. Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendantes et de même loi.
On pose $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2}$ et $Y_2 = \dfrac{X_2}{X_1 + X_2}$.

1. Justifier que Y_1 et Y_2 suivent la même loi.
2. Démontrer que Y_1 admet une espérance finie et calculer $E(Y_1)$.
3. Démontrer que Y_1 admet une variance finie, puis prouver que $\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = -V(Y_1)$.

Exercice 2.

Élements de correction
ROCHE Maëlle

Exercice 1.
• Si on pose $Z = X_1 + X2$, alors puisque X_1 et X_2 suivent la même loi, il en va de même de $Y_1 = \frac{X_1}{Z}$ et $Y_2 = \frac{X_2}{Z}$.
• On a (presque sûrement) $0 < Y_1 < 1$ donc Y_1 admet une espérance et, par croissance de l'espérance, $0 < E(Y_1) < 1$.
Et puisqu'elles suivent la même loi, on a $E(Y_1) = E(Y_2)$. Or $Y_1 + Y_2 = 1$ (presque sûrement) d'où on déduit $E(Y_1) = \frac{1}{2}$.
• Etant bornée, Y_1 admet un moment d'ordre 2. Puis $1 = (Y_1+Y_2)^2 = Y_1^2+Y_2^2+2Y_1Y_2 \implies 1 = 2E(Y_1^2) + 2E(Y_1Y_2)$, i.e. $E(Y_1Y_2) = \frac{1}{2} - E(Y_1^2)$. Alors $\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = \frac{1}{2} - E(Y_1^2) - \frac{1}{4}$. Et puisque $V(Y_1) = E(Y_1^2) - \frac{1}{4}$, il vient que $\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} - (V(Y_1) + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = -V(Y_1)$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour FOURNEAUX Swan
le mar. 4 févr. 25

Semaine 18

Variables aléatoires – Espaces préhilbertiens réels

Question de cours. Donner le tableau de synthèse des lois usuelles (univers associé, loi, espérance, variance, fonction génératrice).

Exercice 1.
Soit E l'ensemble des fonctions f continues sur $[0\,,+\infty[$ telles que f^2 soit intégrable sur $[0\,,+\infty[$ (c'est-à-dire que $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ soit convergente).

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

   (*on pourra commencer par établir que, pour tous réels a et b*, $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$).

2. Pour f et g dans E, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que cette définition a un sens (i.e. que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est bien convergente), et que cela définit un produit scalaire sur E.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 2.

Élements de correction
FOURNEAUX Swan

Exercice 1.

- $(a-b)^2 \geqslant 0 \implies a^2+b^2 \geqslant 2ab \implies 2(a^2+b^2) \geqslant a^2+2abb^2 = (a+b)^2$.

  Ainsi, si f et g sont de carré intégrable, alors $\forall x \geqslant 0,\ \big((\lambda f+g)(x)\big)^2 \leqslant 2\lambda^2 f^2(x) + 2g^2(x)$ et $\lambda f + g$ est aussi de carré intégrable. Le reste est trivial.
- On montre comme ci-dessus que $-a^2-b^2 \leqslant 2ab \leqslant a^2+b^2$ donc que $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. Ainsi $\forall x \geqslant 0,\ \big|f(x)g(x)\big| \leqslant \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}g^2(x)$: la fonction produit fg a une intégrale absolument convergente, donc convergente et $\langle f, g\rangle$ est bien défini.

  On montre sans difficulté que l'on a une forme bilinéaire, symétrique, définie positive.
- On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}$ et $g\colon x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, dont les carrés sont bien intégrables : $\langle f, g\rangle \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 2.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Pour THERESIN KILLIAN
le mar. 4 févr. 25

Semaine 18

Variables aléatoires – Espaces préhilbertiens réels

Question de cours. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt la base (u_1, u_2, u_3) où

$$u_1 = (1,0,1),\ u_2 = (1,1,1),\ u_3 = (-1,-1,0).$$

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Démontrer que $P(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$.
2. Démontrer que $P(X \leqslant \frac{\lambda}{3}) \leqslant \dfrac{9}{4\lambda}$.

Exercice 2.

Élements de correction
THERESIN KILLIAN

Exercice 1.
On a besoin de $E(X) = V(X) = \lambda$, de l'inégalité de Bienaymé : $P(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$ (et si besoin de celle de Markov $P(Z \geqslant a) \leqslant \frac{E(Z)}{a}$ valable pour $Z > 0$ et $a > 0$).
• $P(X \geqslant \lambda + 1) = P(X - E(X) \geqslant 1) \leqslant P(|X - E(X)| \geqslant 1) \leqslant \frac{\lambda}{1^2} = \lambda$. Ou bien avec Markov : $P(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \frac{E(X)}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \leqslant \lambda$.
• $P(X \leqslant \frac{\lambda}{3}) = P(X - E(X) \leqslant -\frac{2\lambda}{3}) \leqslant P(|X - E(X)| \geqslant \frac{2\lambda}{3})$ (par inclusion d'un événement dans l'autre) $\leqslant \frac{\lambda}{(2\lambda/3)^2} = \frac{9}{4\lambda}$.

Exercice 2.