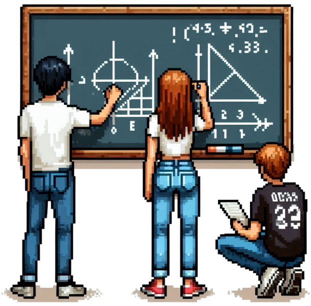
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°19

Du Lundi 10 Février au Vendredi 14 Février
Planche n°1

Question de cours

Soient E un espace euclidien et H un hyperplan de E de vecteur normal u. Donner l'expression, en détaillant toutes les étapes, pour tout $x \in E$ de la distance de x à H (en fonction de x et de u).

Exercice 1

Soit E un espace préhilbertien réel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer les résultats suivants.

1. $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
2. $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$ si E est de dimension finie.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire

$$\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}\left(M^{\top} N\right)$$

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Déterminer une base orthonormée de $F^{\perp}$.
2. Calculer la projection de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^{\perp}$.
3. Calculer la distance de J à F.

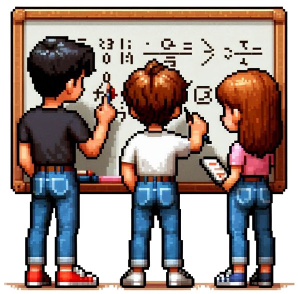
Exercice 3

Représenter puis déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

i. $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x-1| < 1 \right\}$
ii. $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \right\}$
iii. $C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 1 \right\}$
iv. $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \right\}$

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°19

Du Lundi 10 Février au Vendredi 14 Février
Planche n°2

Question de cours

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère F le sous-espace vectoriel défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0 \text{ et } x + y + 2z - t = 0\}.$$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 8, 1, 1)$ sur F.

Exercice 1 : Polynômes de Legendre

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P, Q) \longmapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = (P \mid Q).$$

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on définit les polynômes $U_k(X) = \left(X^2 - 1\right)^k$ et $P_k(X) = U_k^{(k)}(X) = \left[\left(X^2 - 1\right)^k\right]^{(k)}$.

a. Déterminer le degré de P_k.

b. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de E. On pourra montrer que pour $k > \ell$:

$$\int_{-1}^{1} \left[\left(t^2 - 1\right)^k\right]^{(k)} \left[\left(t^2 - 1\right)^\ell\right]^{(\ell)} \mathrm{d}t = (-1)^k \int_{-1}^{1} \left(t^2 - 1\right)^k \left[\left(t^2 - 1\right)^\ell\right]^{(\ell + k)} \mathrm{d}t.$$

2. a. Montrer que U_k vérifie l'équation différentielle :

$$\left(X^2 - 1\right) U_k'' - 2X(k - 1)U_k' - 2kU_k = 0.$$

b. En déduire que que P_k vérifie l'équation différentielle :

$$\left(X^2 - 1\right) P_k'' + 2XP_k' - k(k + 1)P_k = 0.$$

3. Calculer $\|P_k\|^2$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

4. Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n de coefficient dominant 1 . Calculer $\displaystyle\min_{P \in \mathcal{E}_n} \int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 2

Déterminer le **domaine de définition** et le représenter graphiquement pour chaque fonction suivante

$$\textit{i. } f_1 : (x, y) \mapsto \frac{xe^y}{y} + \ln(x), \qquad \textit{ii. } f_2 : (x, y) \mapsto \sqrt{2 - x - y} + \sqrt{xy}$$

Éléments de solution

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on définit le polynôme $P_k(X) = \left[\left(X^2-1\right)^k\right]^{(k)}$.

a. $P_0 = \left(\left(X^2-1\right)^0\right)^{(0)} = 1$ est de degré 0 . $P_1 = \left(\left(X^2-1\right)^1\right)' = 2X$ est de degré 1. Plus généralement

$$P_k = \left[\left(X^2-1\right)^k\right]^{(k)} = \left[X^{2k} + R(X)\right]^{(k)}$$

avec $R(X) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} X^{2\ell} \in \mathbb{R}_{2k-2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_k &= \left[X^{2k} + R(X)\right]^{(k)} = \left(X^{2k}\right)^{(k)} + R^{(k)}(X) \\ &= 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k + R^{(k)}(X) \end{aligned}$$

avec $R^{(k)}$ de degré au plus $k-2$. Ainsi, $\deg(P_k) = k$.

b. La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ polynômes non nuls échelonnée en degrés : c'est donc une base de E. Montrons qu'elle est orthogonale : soit $k > \ell$ dans $[\![0,n]\!]$. Alors en intégrant par parties on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[\left(t^2-1\right)^k\right]^{(k)} \left[\left(t^2-1\right)^\ell\right]^{(\ell)} \mathrm{d}t =& \left[\left(\left(t^2-1\right)^k\right)^{(k-1)} \left(\left(t^2-1\right)^\ell\right)^{(\ell)}\right]_{-1}^1 \\ & - \int_{-1}^1 \left[\left(t^2-1\right)^k\right]^{(k-1)} \left[\left(t^2-1\right)^\ell\right]^{(\ell+1)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Les nombres $\lambda = 1, \mu = -1$ sont des racines du polynôme $\left(X^2-1\right)^k$ de multiplicité k. Les polynômes dérivés $\left(X^2-1\right)^{(p)}$ avec $p \in [\![0,k-1]\!]$ admettent donc $\lambda = 1, \mu = -1$ pour racines. Par conséquent le crochet dans l'intégration par partie est nulle :

$$[\underbrace{\left(\left(t^2-1\right)^k\right)^{(k-1)}}_{\pm 1 \text{ sont racines}} \left(\left(t^2-1\right)^\ell\right)^{(\ell)}]_{-1}^1 = 0$$

Par conséquent, en itérant k fois cette intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left[\left(t^2-1\right)^k\right]^{(k)} \left[\left(t^2-1\right)^\ell\right]^{(\ell)} \mathrm{d}t &= -\int_{-1}^1 \left[\left(t^2-1\right)^k\right]^{(k-1)} \left[\left(t^2-1\right)^\ell\right]^{(\ell+1)} \mathrm{d}t \\ &= \dots = \\ &= (-1)^k \int_{-1}^1 \left[\left(t^2-1\right)^k\right]^{(0)} \left[\left(t^2-1\right)^\ell\right]^{(\ell+k)} \mathrm{d}t \\ &= (-1)^k \int_{-1}^1 \left(t^2-1\right)^k \left[\left(t^2-1\right)^\ell\right]^{(\ell+k)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Le polynôme $\left(X^2-1\right)^\ell$ étant de degré 2ℓ, sa dérivée d'ordre $k+\ell > 2\ell$ est nulle. On obtient $(P_k \mid P_\ell) = 0$ pour tout $k > \ell$. Si $k < \ell$, la symétrie du produit scalaire donne $(P_k \mid P_\ell) = (P_\ell \mid P_k)$. Mais $(P_\ell \mid P_k) = 0$ en échangeant les noms des indices dans le raisonnement précédent. La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc orthogonale.

2. **a**. Montrons que U_k vérifie l'équation différentielle :

$$\left(X^2-1\right) U_k'' - 2X(k-1)U_k' - 2kU_k = 0.$$

- ✗ $U_k = \left(X^2-1\right)^k$.
- ✗ $U_k' = 2kX\left(X^2-1\right)^{k-1}$.
- ✗ $U_k'' = 2k\left(X^2-1\right)^{k-1} + 2kX \cdot (k-1)2X\left(X^2-1\right)^{k-2}$.

Donc :

$$\begin{aligned} \left(X^2-1\right) U_k'' &= 2k\left(X^2-1\right)^k + 2kX \cdot (k-1)2X\left(X^2-1\right)^{k-1} \\ &= 2kU_k + 2(k-1)X \cdot 2kX\left(X^2-1\right)^{k-1} \\ &= 2kU_k + 2(k-1)X \cdot U_k' \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left(X^2-1\right) U_k'' - 2X(k-1)U_k' - 2kU_k = 0 \quad (*)$$

b. ✗ On commence par dériver k fois : $\left(X^2-1\right)U_k''$ par la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\left[\left(X^2-1\right)U_k''\right]^{(k)} &= \sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}\left(X^2-1\right)^{(l)}\left(U_k''\right)^{(k-\ell)}\\
&= \sum_{\ell=0}^{2}\binom{k}{\ell}\left(X^2-1\right)^{(l)}U_k^{(k-\ell+2)}\\
&= \binom{k}{0}\left(X^2-1\right)U_k^{(k+2)}+\binom{k}{1}(2X)U_k^{(k+1)}+\frac{k(k-1)}{2}\cdot 2\cdot U_k^{(k)}\\
&= \left(X^2-1\right)P_k''+2kXP_k'+k(k-1)P_k
\end{aligned}$$

✗ On recommence avec $2X(k-1)U_k'$:

$$\begin{aligned}
&[2X(k-1)U_k']^{(k)}\\
&= 2(k-1)XU_k^{(k+1)}+2k(k-1)U_k^{(k)}\\
&= 2(k-1)XP_k'+2k(k-1)P_k
\end{aligned}$$

✗ Et bien-sûr : $(2kU_k)^{(k)}=2kP_k$.
Puisque le polynôme $\left(X^2-1\right)U_k''-2X(k-1)U_k'-2kU_k=0$ est nul, sa dérivée d'ordre k est nulle et on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\left(X^2-1\right)P_k''+2kXP_k'+k(k-1)P_k+\\
&-2(k-1)XP_k'-2k(k-1)P_k+\\
&-2kP_k=0\\
&\iff \left(X^2-1\right)P_k''+2XP_k'+\left(-k^2-k\right)P_k=0
\end{aligned}$$

On en déduit que P_k vérifie l'équation différentielle :

$$\left(X^2-1\right)P_k''+2XP_k'-k(k+1)P_k=0.$$

3. Calculons $\|P_k\|^2$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_k(t)^2\mathrm{d}t$. On reprend les calculs de la Question **1.b.** dans le cas $k=\ell$. On obtient :

$$\|P_k\|^2=\int_{-1}^{1}P_k(t)^2\mathrm{d}t=(-1)^k\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^k\left[\left(t^2-1\right)^k\right]^{(k+k)}\mathrm{d}t$$

On a $\left[\left(t^2-1\right)^k\right]^{(2k)}=(2k)!$ donc :

$$\begin{aligned}
\|P_k\|^2 &= (-1)^k(2k)!\int_{-1}^{1}\left(t^2-1\right)^k dt\\
&= (2k)!\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^k dt\\
&= (2k)!\int_{-1}^{1}(1-t)^k(1+t)^k dt
\end{aligned}$$

On intègre par parties :

$$\begin{cases} u(t)=(1-t)^k\\ v'(t)=(1+t)^k\end{cases}\rightsquigarrow\begin{cases} u'(t)=-k(1-t)^{k-1}\\ v'(t)=\frac{(1+t)^{k+1}}{k+1}\end{cases}$$

Le crochet de cette intégration par parties est nul :

$$\begin{aligned}
\|P_k\|^2 &= (2k)!\frac{k}{k+1}\int_{-1}^{1}(1-t)^{k-1}(1+t)^{k+1}\mathrm{d}t\\
&= \cdots =\\
&= (2k)!\frac{k(k-1)\ldots 1}{(k+1)(k+2)\ldots(2n)}\int_{-1}^{1}(1+t)^{2k}\mathrm{d}t\\
&= \frac{(2k)!(k!)^2}{(2k)!}\frac{2^{2k+1}}{2k+1}\\
&= 2^{2k}(k!)^2\frac{2}{2k+1}
\end{aligned}$$

4. Soit $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n de coefficient dominant 1.

La borne inférieure suivante $\inf\limits_{P\in\mathcal{E}_n}\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2\mathrm{d}t$ est bien définie car $A=\{\|P\|\;:\;P\in\mathcal{E}_n\}$ est non vide et minoré par 0.

Cette borne inférieure est même un minimum, atteint en un multiple de $P_n=\left[\left(X^2-1\right)^n\right]^{(n)}$. En effet, si $P(X)\in\mathcal{E}_n$ est de coefficient dominant 1 alors il existe des scalaires α_k tels que :

$$P(X)=\frac{n!}{(2n)!}P_n+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k P_k$$

car $\left(P_0,P_1,\ldots,\frac{n!}{(2n)!}P_n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\frac{n!}{(2n)!}P_n$ est de coefficient dominant 1.
Cette base est orthogonale donc par le théorème de Pythagore :

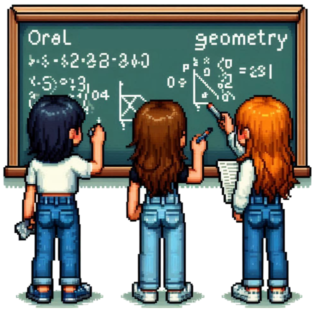
$$\|P\|^2=\frac{n!^2}{(2n)!^2}\left\|P_n\right\|^2+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2\left\|P_k\right\|^2\geqslant\frac{n!^2}{(2n)!^2}\left\|P_n\right\|^2$$

Ainsi, $\left\|\frac{n!}{(2n)!}P_n\right\|^2=\frac{n!^2}{(2n)!^2}2^{2n}n!^2\frac{2}{2n+1}$ minore tous les éléments de $\mathcal{E}_n$ (et est un élément de $\mathcal{E}_n$). Conclusion :

$$\inf_{P\in\mathcal{E}_n}\int_{-1}^{1}P(t)^2\mathrm{d}t=\left\|P_n\right\|^2=2^{2n}\frac{n!^4}{(2n)!^2}\frac{2}{2n+1}.$$

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°19

Du Lundi 10 Février au Vendredi 14 Février
Planche n°3

Question de cours

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

i. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ *ii.* $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *iii.* $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} (t - a\cos(t) - b\sin(t))^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 2

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que l'application $\varphi : (u,v) \mapsto^t XMY$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ (où X et Y représentent respectivement les vecteurs colonnes des coordonnées de u et v dans la base canonique).
2. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à un v bien choisi, montrer que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \qquad (x+4y)^2 \leq 2\left(x^2+6xy+10y^2\right)$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, soit $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\,(u,v)$ avec $u\,(1,1,1,0)$ et $v\,(1,0,0,-1)$.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Éléments de solution

Exercice 2

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$.

1. Montrons que φ est un produit scalaire.

- ✗ Comme M est symétrique, il est immédiat que φ est symétrique.
- ✗ La linéarité à droite est immédiate également (c'est celle du produit matriciel) et par symétrie, φ est aussi linéaire à gauche.
- ✗ Soit u de coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(u,u) &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+10y \end{pmatrix} \\ &= x(x+3y) + y(3x+10y) = x^2 + 6xy + 10y^2 \\ &= (x+3y)^2 + 9y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

  donc φ est positive.

- ✗ Du calcul précédent, on déduit,

$$\begin{aligned} \varphi(u,u) = 0 &\iff (x+3y)^2 + 9y^2 = 0 \\ &\iff (x+3y)^2 = 0 \quad \text{et} \quad 9y^2 = 0 \\ &\iff x = y = 0 \\ &\iff u = 0 \end{aligned}$$

  et φ est bien définie.

On a bien montré que φ était un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. D'après les calculs précédents, en notant $u = (x,y)$ et $v = (a,b)$, on a, par Cauchy-Schwarz,

$$(x(a+3b) + y(3a+10b))^2 = \varphi(u,v) \leq \varphi(u,u)\varphi(v,v) = \left(x^2 + 6xy + 10y^2\right)\left(a^2 + 6ab + 10b^2\right).$$

En choisissant v de sorte que $a + 3b = 1$ et $3a + 10b = 4$, ce qui donne $b = 1$, $a = -2$ puis $a^2 + 6ab + 10b^2 = 2$, on obtient bien

$$(x+4y)^2 \leq 2\left(x^2 + 6xy + 10y^2\right).$$