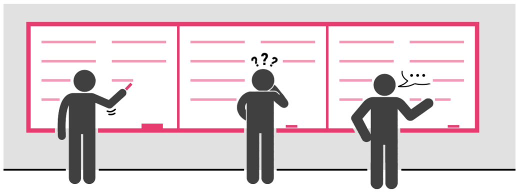
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°2

Du Lundi 16 Septembre au Vendredi 20 Septembre
Planche n°1

Question de cours

`Python.` Proposer deux fonctions différentes (dont une des deux récursive) qui permettent de calculer le terme de rang n de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_{n+2},$$

où a et b sont des réels rentrés en argument.

Exercice 1

On définit une suite de polynômes $P_0 = 2, P_1 = X$ et $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*, P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $P_n(2\cos\theta)$.
4. Donner les racines de P_n.

Exercice 2

Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$.

Exercice 3

On considère, dans cet exercice, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1. **a**. En étudiant les variations de la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$, montrer:

$$\forall t \in [0,1],\ \ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{4}.$$

b. En déduire : $\forall n \geqslant 1,\ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \exp\left(1 - \dfrac{1}{4n}\right)$.

2. **a**. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \exp\left(-\dfrac{1}{4n}\right)$.

b. En considérant le produit $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k}$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n \leqslant \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$.

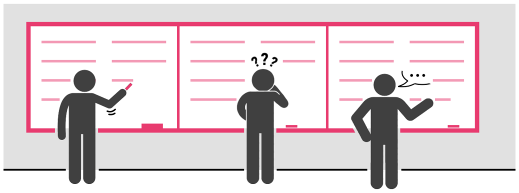
3. **a**. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

b. En déduire : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \leqslant \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\ln(n)\right)$.

c. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°2

Du Lundi 16 Septembre au Vendredi 20 Septembre
Planche n°2

Question de cours

Suites récurrentes et fonctions contractantes : énoncé **et démonstration** du Théorème 11.

Exercice 1

Étudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(3u_n - 2\overline{u_n}\right)$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 puis vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n). Montrer qu'elle converge vers une limite ℓ dont on donnera un encadrement.
4. En encadrant u_n^n, déterminer ℓ.

Exercice 3

On considère une liste $L = [\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{n-1}]$ constituée d'entiers relatifs, avec $\ell_0 > 0$.

On cherche deux entiers $0 \leq p < q \leq n$ tels que $S = \displaystyle\sum_{i=p}^{q-1} \ell_i$ soit maximale.

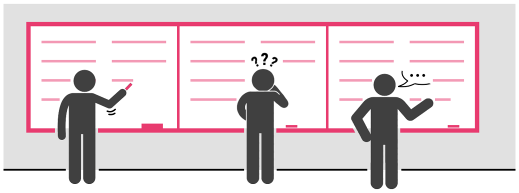
1. Si L ne contient que des termes positifs, quelles sont les valeurs de p, q ?
2. Écrire une fonction `cumul(L)` qui renvoie la liste C dont le k-ème terme est $C(L,k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \ell_i$.
3. Exprimer S en fonction de $C(L,q)$ et de $C(L,p)$.
4. Écrire une fonction `pq(L)` renvoyant le maximum de S est les valeurs de p, q associées.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n+1)H_n - n$.

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°2

Du Lundi 16 Septembre au Vendredi 20 Septembre
Planche n°3

Question de cours

Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$ (et $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$), la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^2\right)$.

1. Soit $f : x \mapsto x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.

a. Étudier les variations de f et résoudre l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que : $\forall x \in [1, 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

c. Montrer que $[1, 2]$ est stable par f.

2. Étudier de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel $\ell \neq 0$. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$. Est-ce toujours vrai si $\ell = 0$?

Exercice 3

En découpant astucieusement la somme, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$$

Exercice 4

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul de degré d.
Pour n entier naturel, on définit u_n comme étant la somme (avec multiplicité) des racines de $P^{(n)}$.
Montrer que $(u_n)_{0\leq n\leq d}$ est une suite arithmétique.

Semaine de colle 2
Planche 1

Question de Cours.

Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Exercice 1.

Soit $a > 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

1. Étudier brièvement les variations de f et le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n). *Indication :* On pourra commencer par s'intéresser au cas où $u_0 > \sqrt{a}$.
   On supposera dans la suite que $u_0 > \sqrt{a}$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$$
   Calculer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire une expression de v_n en fonction de v_0 et n.
4. En partant de l'expression de v_n en fonction de u_n, déduire de la question précédente une majoration de $|u_n - \sqrt{a}|$ en fonction de u_0, v_0 et n.
5. Quel type d'algorithme cet exercice permet-il de réaliser ? Que pensez-vous de son efficacité ?
6. En posant $w_n = \frac{a}{u_n}$ et en interprétant le produit $u_n \times w_n$ en terme d'aire, donner une interprétation heuristique de cet algorithme.

Exercice 2.

1. Rappeler la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.
2. Démontrer que la fonction $f\colon]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ admet une limite en $+\infty$ mais pas en 0.

Semaine de colle 2
Planche 2

Question de Cours.
Énoncer et démontrer le théorème du cours sur les suites récurrentes et fonctions contractantes.

Exercice 1.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et on considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de f
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et donner le tableau de signes de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose dans cette partie que $u_0 \in [0; \alpha]$.
   (a) On considère $g = f \circ f$. Justifier brièvement que g est croissante sur $[0; +\infty[$ et que $g(\alpha) = \alpha$. On admettra de plus que $g(x) \geq x$ sur $[0; \alpha]$ et $g(x) \leq x$ sur $[\alpha; +\infty[$.
   (b) En déduire le sens de variation des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})
   (c) Conclure quant à la convergence et la limite éventuelle de (u_n) dans ce cas.
4. Traiter le cas où $u_0 \notin [0; \alpha]$

Exercice 2.

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et ℓ un réel. Énoncer les définition du cours de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ et de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Démontrer à l'aide de cette définition que si f est croissante et non bornée sur un voisinage de $+\infty$ alors elle tend vers $+\infty$.

Semaine de colle 2
Planche 3

Question de Cours.

Proposer deux fonctions différentes (dont une des deux récursive) qui permettent de calculer le terme de rang n de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Exercice 1.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ et on considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier brièvement les variations de f et résoudre l'équation $(E)\colon f(x) - x = 0$. On donnera de plus le tableau de signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$ où on notera α la solution de (E) dans $\mathbb{R}_+^*$
2. Étudier la convergence de (u_n) lorsque $u_0 \in]-\infty; -\alpha[\cup]\alpha; +\infty[$
3. Montrer que f est contractante sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ et conclure quant à la convergence et la limite éventuelle de (u_n) lorsque u_0 appartient à cet intervalle.
4. On suppose maintenant que $u_0 \in]\frac{1}{2}; \alpha[$.
   (a) Justifier qu'il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} \notin]\frac{1}{2}; \alpha[$.
   (b) Conclure dans ce cas.

Exercice 2.

1. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$, x_0 et ℓ des réels. Énoncer la définition du cours de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
2. Démontrer à l'aide de cette définition que si une fonction admet une limite finie en x_0, celle-ci est unique.

Colle PT – 2
Jeudi 19/09/24

A] **Question de cours :**

Calculer : S = $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$

Exercices :

1) En écrivant $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ sous la forme du produit de deux autres coefficients binomiaux, prouver que : $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$

2) Etude de la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{3U_n+4}$

3) Soit f la fonction définie par : $\boxed{f(x) = \frac{2\ln(1+x)-x}{x}}$ si x non nul et $f(0) = 1$.
Quel est l'ensemble de définition de f ? Est-elle continue sur cet ensemble ? Justifier.
Est-elle dérivable sur cet ensemble ? Justifier

B] **Question de cours :**

Proposer deux fonctions différentes (dont une des deux récursive) qui permettent de calculer le terme de rang n de la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$, où a et b sont des réels rentrés en argument.

Exercices :

1) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur explicite de u_n.

2) a) Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme P = $(X+1)^n - e^{2ina}$, où a est un réel.

b) En déduire : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$. Que vaut $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$?

3) Soit g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(u) = \frac{u^3}{e^u - 1}$.

a) Comment doit-on choisir $g(0)$ pour que g soit continue en 0 ?
b) g est-elle alors dérivable en 0 ? de classe C^1 en 0 ?

C] **Question de cours :**

Donner et démontrer le théorème sur les suites récurrentes et fonction coontractante.

Exercices :

1) a) Soit $(n,p)\in\mathbb{N}$, avec $0 \le p \le n$. Montrer que : $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

b) Que donne la formule précédente si on fixe : p = 1 ?

c) En fixant p = 2, en déduire la valeur de S = $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

d) Après avoir simplifier $\binom{k+1}{3}$, trouver la valeur de T = $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

2) Etude de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$

Détails pour l'exercice C2

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2).$$

(1) Étudier les variations de f et montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
(2) Montrer que pour tout entier n, $u_n \in [1;2]$.
(3) Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell = \sqrt{2}$.
(4) Montrer que pour tout $t \in [1;2]$, $\quad |f'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$.
(5) Montrer que pour tout entier n dans $\mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|,$$

puis que :

$$|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(6) En déduire la convergence de la suite (u_n).

Théorème 11. **Suites récurrentes et fonction contractante**

Soient $q \in [0,1[$ et $f : [a,b] \to [a,b]$ dérivable telle que $\forall x \in [a,b], \ |f'(x)| \leqslant q$.
On définit une suite (u_n) en posant $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On a alors les résultats suivants.

i. f possède un unique point fixe ℓ;
ii. $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1} - \ell| \leqslant q|u_n - \ell|$;
iii. $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \ell| \leqslant q^n|u_0 - \ell|$;
iv. (u_n) converge vers ℓ.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour FOURNEAUX Swan
le mar. 17 sept. 24

Semaine 2

Trigonométrie, polynômes, suites numériques

Question de cours. Écrire en langage Python deux fonctions différentes (dont une des deux récursive) qui permettent de calculer le terme de rang n de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\ ,$$

où a et b sont des réels rentrés en argument.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, lorsque c'est possible, par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelles valeurs de u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle constante ?
2. Démontrer que, si $u_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -2$.
3. On suppose maintenant que $u_0 \neq -2$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.
   - **a.** Étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - **b.** La suite (u_n) admet-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 2.
Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+1)^7 - \mathrm{X}^7 - 1$.

Démontrer que $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine de P et déterminer sa multiplicité.

Élements de correction

FOURNEAUX SWAN

Exercice 1 On note $f(x) = \frac{4x+2}{x+5}$

1. $f(x) = x \iff x \in \{-2; 1\}$ donc (u_n) est constante pour $u_0 \in \{-2; 1\}$;
2. Et $f(x) = -2 \iff x = -2$ donc par récurrence immédiate, $u_n \neq -2 \implies u_{n+1} \neq -2$.
3. On trouve que $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ donc $v_n = v_0 \times \frac{1}{2^n}$, avec $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2}$. D'où $u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n} = \frac{2^n+2v_0}{2^n-v_0}$.

   On obtient facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2.

• On sait que j vérifie $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1 = 0$ donc $\mathrm{j}+1 = -\mathrm{j}^2$. Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{j}) = -\mathrm{j}^{14}-\mathrm{j}^7-1$. Or $\mathrm{j}^3 = 1 \implies \mathrm{j}^7 = \mathrm{j}$ et $\mathrm{j}^{14} = \mathrm{j}^2$ donc il vient $\mathrm{P}(\mathrm{j}) = -\mathrm{j}^2 - \mathrm{j} - 1 = 0$. CQFD.

• Puisque $\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = 7[(\mathrm{X}+1)^6 - \mathrm{X}^6]$ et que $(\mathrm{j}+1)^6 - \mathrm{j}^6 = \mathrm{j}^{12} - \mathrm{j}^6 = 1 - 1 = 0$, on a $\mathrm{P}'(\mathrm{j}) = 0$ donc j est au moins de multiplicité 2.

Puisque $\mathrm{P}'' = 42[(\mathrm{X}+1)^5 - \mathrm{X}^5]$ et que $(\mathrm{j}+1)^5 - \mathrm{j}^5 = -\mathrm{j}^{10} - \mathrm{j}^5 = -\mathrm{j} - \mathrm{j}^2 = 1$, on a $\mathrm{P}''(-\mathrm{j}) \neq 0$. Donc j est de multiplicité 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour ROCHE Maëlle
le mar. 17 sept. 24

Semaine 2

Trigonométrie, polynômes, suites numériques

Question de cours. Calculer, pour $\theta \in \mathbb{R}$ (et $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$) la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

Exercice 1. Soit $f\colon\ ]0\,,+\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \frac{3}{x})$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, $f(x) \geqslant \sqrt{3} > 0$ et donner un encadrement de $f'(x)$ pour $x \geqslant \sqrt{3}$.
2. On peut donc définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $\begin{cases} u_0 \in\ ]0\,,+\infty[\\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 2.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$: calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n(\theta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$.

Élements de correction
ROCHE Maëlle

Exercice 1.

1. On fait l'étude des variations de f : $f'(x) = \frac{x^2-3}{2x^2}$, ce qui conduit au tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f	‖	$+\infty$	$\searrow$ $\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

On établit ensuite que $x \geqslant \sqrt{3} \implies 0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Le premier terme u_0 n'est pas forcément dans $\mathrm{I} := [\sqrt{3}, +\infty[$ mais le tableau montre que $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in \mathrm{I}$. Or I est stable par f et, sur cet intervalle I, f est contractante (avec $k = \frac{1}{2}$). On voit sur le tableau un point fixe $\ell = \sqrt{3}$ et un théorème de cours garantit d'une part son unicité et d'autre part que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 2.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on linéarise $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, puis on somme classiquement : $\mathrm{S}_n(\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\cos(n\theta)\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
Et $\mathrm{S}_n(\theta) = n + 1$ si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour THERESIN Killian
le mar. 17 sept. 24

Semaine 2

Trigonométrie, polynômes, suites numériques

Question de cours. Exprimer $\tan(x+y)$ à l'aide de $\tan(x)$ et $\tan(y)$, et justifier cette expression.

Exercice 1. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
On considère les suites définies par $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$.
2. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Démontrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes et qu'elles ont la même limite.

Exercice 2.
Démontrer que
$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta)$$

Élements de correction
THERESIN KILLIAN

Exercice 1.

1. $(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2 \geqslant 0 \implies u+v \geqslant 2\sqrt{uv}$. De cette inégalité générale, on déduit $\forall n,\ a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$ et c'est aussi vrai au rang 0.
2. Variations de (a_n) et (b_n) : trivial, en revenant à la définition.
3. (a_n) est croissante et majorée par $b_0 = b$ donc converge vers ℓ_a. Idem pour (b_n) qui converge vers ℓ_b. On passe ensuite à la limite dans l'une ou l'autre des relations de récurrence pour obtenir $\ell_a = \ell_b$.

Exercice 2.
D'une part $\cos^4\theta + \sin^4\theta = \cos^4\theta + (1-\cos^2\theta)^2 = 1 - 2\cos^2\theta + 2\cos^4\theta$. Et d'autre part, $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ donc $1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - 2(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta$, ce qui conduit à l'égalité recherchée.