Semaine de colle n°3

Du Lundi 23 Septembre au Vendredi 27 Septembre
Planche n°1

Question de cours

Informatique. Représenter graphiquement et expliquer le principe de construction de la suite (u_n) permettant d'obtenir une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton.

Exercice 1

Soit P la fonction polynômiale réelle définie par
$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$
On suppose que les coefficients de P satisfont la relation
$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$
Montrer que P admet au moins une racine dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 2

Soient $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définies par
$$g(x) = (x-2)e^x + (x+2), f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. Démontrer que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $f'(0)$?

3. Vérifier que $f''(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3}$ pour tout $x > 0$. En déduire que $|f'(x)| \leq 1/2$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 2$$

Exercice 3

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,
$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

2. Plus précisément, montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x).$$

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°3

Du Lundi 23 Septembre au Vendredi 27 Septembre
Planche n°2

Question de cours

Étudier la continuité, dérivabilité et caractère $\mathcal{C}^1$ en 0 de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{e^x + 1} + nx$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent en $-\infty$. En déduire les limites de $f_n(x)$ aux extrémités de son ensemble de définition ainsi que l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f_n, dont on précisera les équations.

3. Expliciter les développements limités en 0 à l'ordre 3 de e^x et de $\dfrac{1}{1+x}$.

4. En constatant que
$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x - 1}{2}\right)},$$
et en utilisant les deux développements limités précédents, obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_n(x)$.

Exercice 2

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X+1)^{2n} - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $P_n = XQ_n$, où Q_n est un polynôme dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n n'admet que des racines simples.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les racines complexes de P_n (on les mettra sous forme exponentielle).

4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $\deg(P) + 1$ solutions.

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°3

Du Lundi 23 Septembre au Vendredi 27 Septembre
Planche n°3

Question de cours

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 1

On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, les polynômes $Q_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = Q_n^{(n)}$.

1. Quel est le degré de L_n ? Quel est son coefficient dominant ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X^2 - 1)Q_n' = 2nXQ_n$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est solution de l'équation différentielle
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que
$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} \exp\left(\frac{1}{c}\right).$$
2. Déterminer
$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right).$$
3. Autre méthode. À l'aide de développements limités usuels, retrouver le résultat.

Exercice 3

En découpant astucieusement la somme, montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$$

Semaine de colle 3
Planche 1

Question de Cours.
Énoncer et démontrer le théorème du cours sur les suites récurrentes et fonctions contractantes.

Exercice 1.

1. Déterminer des équivalents simples à $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x-2}$ au voisinage de 0, $+\infty$ et 1.
2. Déduire du dernier équivalent $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\ln(x)$

Exercice 2.
Pour $n \geq 3$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - x - n$.

1. Montrer que f_n réalise une bijection de l'intervalle $]1;+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.
2. En déduire que l'équation $(E_n)\colon x^n - x - n = 0$ admet une unique solution x_n dans l'intervalle $]1;+\infty[$.
3. Pour $x > 1$ fixé, donner un équivalent de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. En déduire que, quel que soit $\varepsilon > 0$, $1 < x_n < 1+\varepsilon$ à partir d'un certain rang et en déduire la limite L de (x_n).
5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$,
$$x_n - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln(x_n+n)} - 1$$
6. En déduire un équivalent de $x_n - L$ en $+\infty$.

Semaine de colle 3
Planche 2

Question de Cours.
Étudier la continuité, dérivabilité et caractère $\mathcal{C}^1$ en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.

1. En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction arctan, montrer que,

$$\forall t > 0, \quad \frac{t}{1+t^2} < \arctan(t) < t$$

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 - x^2)^n$$

On supposera dans un premier temps que n est pair.

1. En appliquant la formule du binôme de Newton, déterminer le coefficient de x^n dans $f(x)$ et en déduire le coefficient constant de $f^{(n)}$.
2. En utilisant la formule de Leibniz appliquée à $f(x) = (1-x)^n(1+x)^n$, calculer $f^{(n)}(x)$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$
4. Reprendre les questions précédentes pour n impair.

Semaine de colle 3
Planche 3

Question de Cours.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution sur $]0; +\infty[$ notée a_n. Montrer que $a_n < \frac{1}{n}$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 1.

1. Rappeler la formule de Leibniz
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ième de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$.

Exercice 2.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

3. Que peut-on en déduire quant à la classe de f ?

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour CHAABANE Cyrine
le mar. 24 sept. 24

Semaine 3

Fonctions d'une variable réelle

Question de cours. Étudier la continuité en 0, la dérivabilité en 0 et le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.
Soit $a > 0$.
Pour tout entier naturel n, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n - a(1-x)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_n(u_n)$ et en déduire le sens de variation de (u_n).
3. Démontrer la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 2.

Élements de correction
CHAABANE Cyrine

Exercice 1.

- f_n est une bijection croissante de $[0\,,1]$ dans $[-a\,,1]$, d'où le résultat.
- $\forall x \in [0\,,1]$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ donc $f_{n+1}(u_n) \leqslant f_n(u_n) = 0$. Compte-tenu des variations de f_{n+1}, on a nécessairement $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite est ainsi croissante, et majorée par 1 donc elle converge vers $\ell \in [0\,,1]$.

  Si $\ell < 1$, alors $u_n^n = \exp(n \ln u_n) = a(1-u_n) \implies 0 = a(1-\ell)$ (par passage à la limite) donc $l = 1$: contradiction avec l'hypothèse. Le seul cas possible est donc $\ell = 1$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour GRABOWIECKI Mathéo
le mar. 24 sept. 24

Semaine 3

Fonctions d'une variable réelle

Question de cours. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution sur $[0\,,+\infty[$, notée a_n. Montrer que $a_n < \frac{1}{n}$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] & \text{si } x > 0 \\ 1 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue (à droite) en 0.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier que $\forall x > 0$, $f(x) = x\exp\left[(1+x)\ln(1+\frac{1}{x})\right]$ et en déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\,x$.

Exercice 2.

Élements de correction
GRABOWIECKI MATHÉO

Exercice 1.

• Puisque $x\ln(1+\frac{1}{x}) = x\ln(x+1) - x\ln x \xrightarrow{x\to 0^+} 0$ par croissance comparée et opérations usuelles, il vient que $f(x) \xrightarrow{x\to 0^+} 1\times e^0 = 1$. D'où la continuité à droite en 0.

• Après regroupement et simplification, on obtient $f'(x) = (x+1)\ln(1+\frac{1}{x})\exp\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right)$. Chaque terme est positif sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

• On obtient l'égalité du texte en transformant l'écriture de $x\exp\left((1+x)\ln(1+\frac{1}{x})\right)$.
Puisque $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, il vient que $(1+x)\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$
donc $\exp\left((1+x)\ln(1+\frac{1}{x})\right) \xrightarrow{x\to+\infty} e$ (Warning : pas de composition des équivalents !). On en conclut que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ex$.

Exercice 2.

PIERRE-ALAIN SALLARD
chez FRÉDÉRIC GAUNARD
Classe de PT – 2024/2025

Pour KODAD AMANI
le mar. 24 sept. 24

Semaine 3

Fonctions d'une variable réelle

Question de cours. Formule de Taylor avec reste intégral : énoncé et démonstration.

Exercice 1 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

Élements de correction

KODAD AMANI

Exercice 1.

• Clairement, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. En 0^+, on pose $t = \frac{1}{x}$: puisque $f(x) = \frac{1}{t^2}\ln(1+t) \sim \frac{\ln t}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissance comparée. Ceci prouve la continuité en 0.

• Pour $x \neq 0$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ 2x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} \text{ si } x > 0 \end{cases}$. À nouveau par croissance comparée, on a $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. La régularité $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ assurent que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.