Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°4

Du Lundi 30 Septembre au Vendredi 4 Octobre
Planche n°1

Question de cours

Montrer que $(1, (X-1), (X-1)^2, ..., (X-1)^n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 1

Donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(\cos(h))$.

Exercice 2

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout réel x,

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \text{ et } L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que, pour tout entier n, L_n est une fonction polynômiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

2. Plus précisément, montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x).$$

Exercice 3

1. Soient a, b positifs ou nuls. Vérifier $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$.

2. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right)$.

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°4

Du Lundi 30 Septembre au Vendredi 4 Octobre
Planche n°2

Question de cours

Obtenir de deux façons (par Taylor-Young puis à l'aide de DL usuels), le développements limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+\ln(1+x))$.

Exercice 1

On pose $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que sur cet intervalle on ait $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}$.

2. Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[$, $\left(x^2-1\right) f'(x) = xf(x)$. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) + (2n-1)\,xP_n(x) + n\,(n-2)\,(x^2-1)P_{n-1}(x) = 0.$$

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel et $u_1,\dots,u_n \in E$. Pour $k=1,\dots,n$, on pose $v_k = u_1+\cdots+u_k$. Démontrer que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est libre.

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°4

Du Lundi 30 Septembre au Vendredi 4 Octobre
Planche n°3

Question de cours

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 1

On introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, les polynômes $Q_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = Q_n^{(n)}$.

1. Quel est le degré de L_n ? Quel est son coefficient dominant ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X^2-1)Q_n' = 2nXQ_n$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est solution de l'équation différentielle
$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Exercice 2

Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E de dimension finie $m \geq n$. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $\deg(P) + 1$ solutions.

Mathématiques PT 2024-2025
J. Roger

Semaine de colle 4
Planche 1

Question de Cours.

Énoncer la formule de Leibniz et en déduire la dérivée n-ième de $f\colon x \mapsto (2x+1)^2 \sin(x)$.

Exercice 1.

1. Rappeler le domaine de définition et deux expressions de la dérivée de la fonction tangente puis donner le domaine de définition et l'intervalle image de sa fonction réciproque arctan.
2. Retrouver l'expression de la dérivée de arctan à partir de celle de tan.
3. En partant du $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$, retrouver le $DL_{2n+1}(0)$ de $\arctan(x)$.
4. Tracer l'allure de sa courbe représentative avec ses asymptotes et sa tangente en 0.

Exercice 2.

Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{2x+x^2}{\ln(1+x)}$ en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 3.

À l'aide de la formule de Taylor-Young déterminer le $DL_2(1)$ de $\arctan(x)$ puis en déduire un développement asymptotique de $\arctan\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Semaine de colle 4
Planche 2

Question de Cours.
Obtenir le $DL_3(0)$ de $\ln(1+\ln(1+x))$ de deux façons (Par Taylor-Young puis à l'aide des DL usuels).

Exercice 1.
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

1. Donner son domaine de définition et de dérivabilité.
2. Calculer sa dérivée f'.
3. En déduire une expression simplifiée de f.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f avec sa tangente en 0.

Exercice 2.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(1) = a$ et

$$f(x) = \frac{2x\ln(x)}{x-1} \text{ si } x \neq 1$$

À l'aide d'un développement limité, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la valeur de a pour laquelle f est continue en 1 ?
2. Justifier que le prolongement obtenu est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1 et leur position relative au voisinage de 1.

Exercice 3.
Déterminer le $DL_5(0)$ de $\arctan\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

Semaine de colle 4
Planche 3

Question de Cours.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.

1. Rappeler le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction arccos et donner une expression de sa dérivée.
2. Rappeler le $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le DL_5 de $\arccos(x)$ en 0.
4. Tracer l'allure de sa courbe représentative avec sa tangente en 0.

Exercice 2.

1. Déterminer un développement asymptotique de $f(x) = \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x+2}$ à la précision $\frac{1}{x}$.
2. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 3.

À l'aide de la formule de Taylor-Young déterminer le $DL_3(\frac{\pi}{3})$ de $f(x) = \ln(\cos(x))$

Colle PT – 4
Jeudi 03/10/24

A] **Question de cours :**

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

Exercices :

1)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$. On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Déterminer le domaine de définition de f. Comment peut-on réduire l'intervalle d'étude de f ?

b) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que peut-on dire de Γ ? Réduire encore l'intervalle d'étude.

c) Démontrer que la composée de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
En écrivant f comme composée de fonctions, en déduire les variations de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, puis déterminer la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$.

d) Tracer Γ à l'aide des résultats obtenus.

2) Montrer que $E = \{(x, y, z, t) \in R^4, x + y = z + t = 0\}$ est un ev en donner une base.

4) Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension 3, tels que $F \neq G$. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

B] **Question de cours :**

Énoncé de la formule de Leibniz.

Application à la détermination de la dérivée n−ième de f : $x \longmapsto (2x + 1)^2 \sin(x)$.

Exercices :

1) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arccos(1- 2x^2)$.

a) Déterminer son ensemble de définition et de dérivabilité.

b) Calculer $f'(x)$ et simplifier . En déduire une expression simplifiée de f(x).

c) En posant $\alpha = \arcsin x$ dans l'expression initiale de f, retrouver le résultat précédent.

2) Dans l'espace vectoriel des fonctions définies de R dans R, que peut-on dire des familles (f_1,f_2,f_3,f_4) et (f_1,f_2,f_4) avec : $f_1(x)=1$; $f_2(x)=\cos(x)$; $f_3(x)=\cos(2x)$ et $f_4(x)=\cos^2(x)$

3) Soit $B=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ une base de E, un espace vectoriel de dimension n. Pour tout j de $[\![1; n]\!]$ on pose : $e'_j = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) - e_j$. Montrer que la famille $B'= (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base de E.

C] **Question de cours :**

Obtenir de deux façons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de ln(1 + ln(1 + x)).

Exercices :

1) Montrer la relation suivante sur un intervalle à préciser : $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

2) Montrer que $E = \left\{ f \in C^2(R,R) / f''+3f'+f = 0 \right\}$ est un ev et en donner une base.

3) Soit pour tout $k \in [\![0;n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Montrer que la famille $(P_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $R_n[X]$.

b) Donner la décomposition de $Q = \frac{d^n}{dX^n}(X^n(1-X)^n)$ dans cette base.

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour HUET Maxence
le mar. 1 oct. 24

Semaine 4

Analyse réelle – Espaces vectoriels

Question de cours. Donner de deux façons différentes le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\ln(1+x)\right)$.

Exercice 1.
On définit la fonction f par $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.
3. Dresser le tableau de variation de f, en précisant ses limites.
   Tracer l'allure du graphe de f.

Exercice 2.

Élements de correction
HUET Maxence

Exercice 1.

- Le dénominateur doit être non nul et l'expression sous la racine carrée doit être positive : un tableau de signes permet d'établir que $\mathcal{D}_f =]-1\,,1]$.
- La fonction f est continue sur $\mathcal{D}_f$ par opérations élémentaires. La fonction racine n'est pas dérivable en 0 : donc f n'est pas dérivable en $x = 1$.

  Pour $x \in]-1\,,1[$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (après quelques calculs !). D'où la décroissance de la fonction f sur $\mathcal{D}_f$.
- On a donc une fonction f décroissante, avec $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} = +\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour LOUZANI Amel
le mar. 1 oct. 24

Semaine 4

Analyse réelle – Espaces vectoriels

Question de cours. Énoncer la formule de Leibniz et l'appliquer pour déterminer une expression de la derivée n-ième de $f\colon x \mapsto (2x+1)^2 \sin(x)$.

Exercice 1. La fonction de Gudermann, notée gd, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{gd}(x) = \arcsin(\tanh x)$$

On rappelle que la fonction tangente hyperbolique est définie pour tout réel x par $\tanh x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

1. Dresser le tableau de variations de gd, en précisant ses limites.
2. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de gd.
3. Justifier que gd coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la fonction $f\colon x \mapsto \arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.

Élements de correction

LOUZANI AMEL

Exercice 1.

- Après simplifcation, on obtient $\mathrm{gd}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ donc gd est croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{gd}(x) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{gd}(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
- Avec $\mathrm{gd}^{(2)}(x) = \frac{-\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$ et $\mathrm{gd}^{(3)}(x) = \frac{2\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^3 x}$, on obtient par Taylor-Young :

$$\mathrm{gd}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

- On montre que $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \mathrm{gd}'(x)$ et que les valeurs en 0 sont égales, ce qui fournit le résultat.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour KUNZT Eliott
le mar. 1 oct. 24

Semaine 4

Analyse réelle – Espaces vectoriels

Question de cours. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$.

Exercice 1. On note $\mathrm{U} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et on définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathrm{U} \\ f(x) = \frac{\pi}{2} & \text{pour } x \in \mathrm{U} \end{cases}$$

1. En étudiant la périodicité de f puis en calculant $f(\pi - x)$, justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $\mathrm{I} = [-\pi/2\,,\pi/2]$.
2. Justifier que f est continue en $-\frac{\pi}{2}$.
3. Donner une expression de f' sur $]-\pi/2\,,\pi/2[$ et en déduire une expression simple de f sur I.

   Tracer alors l'allure du graphe de f.

Exercice 2.

Élements de correction
KUNZT Eliott

Exercice 1.
• Puisque f est 2π-périodique et que $f(\pi - x) = f(x)$ (symétrie par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$), on restreint l'étude à $\mathrm{I} = [-\pi/2\,,\pi/2]$.
• Par composition de limite, on a bien $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} = f(-\frac{\pi}{2})$ donc f est bien continue en ce point.
• On pose $g(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$: g n'est pas définie en $-\pi/2$, g est positive sur I et $g > 0$ si $x \neq \pi/2$ donc $\sqrt{g}$ n'est pas dérivable en $\pi/2$.
Pour $x \in\ ]-\pi/2\,,\pi/2[$, $g'(x) = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2}$ et, après calculs, $f'(x) = -1/2$. Donc sur I, $f(x) = -\frac{x}{2} + \arctan 1 = -\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$.
Et on prolonge f par symétrie et périodicité pour obtenir « un signal triangulaire ».

Exercice 2.