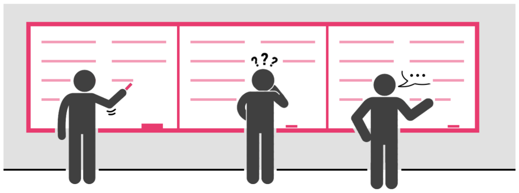
Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°4

Du Lundi 7 Octobre au Vendredi 11 Octobre
Planche n°1

Question de cours

Informatique. Écrire une fonction `occurences(T)` qui prend en argument une chaîne de caractères `T` et renvoie un dictionnaire associant à chaque caractère présent dans `T` le nombre d'occurrences de celui-ci.

Exercice 1

Soit F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\right\}$$
$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y = -z\right\}$$

1. Démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Donner l'expression analytique de la projection p sur F parallèlement à G (c'est-à-dire donner une formule explicite pour $p(x, y, z)$).
3. Donner l'expression analytique de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 2

Déterminer une base de l'hyperplan correspondant au noyau de la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1, 1, 1) = 0, f(2, 0, 1) = 1 \text{ et } f(1, 2, 3) = 4.$$

Exercice 3

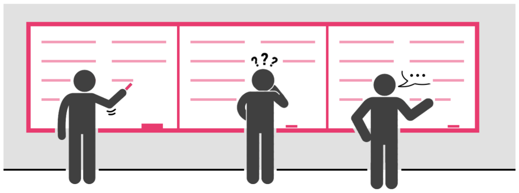
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 . On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1 - X)P'$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°5

Du Lundi 7 Octobre au Vendredi 11 Octobre
Planche n°2

Question de cours

Énoncé du théorème du rang. Cas particulier des endomorphismes en dimension finie. On attend une explication de chaque équivalence du **Théorème 8**.

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x-y+z=0$ et la droite vectorielle D engendrée par $u=(1,3,1)$.

1. Vérifier que P et D sont des espaces supplémentaires.
2. On note p la projection sur P parallèlement à D. Exprimer $p(x,y,z)$.
3. On note s la symétrie par rapport à P parallèlement à D. Exprimer $s(x,y,z)$.

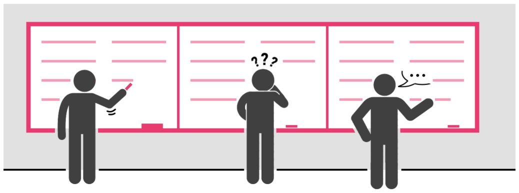
Exercice 2 - Incontournable

Dans tout l'exercice, on considère un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$.

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de E, alors $\dim(F\cap G) \geq \dim(F)+\dim(G)-n$.
2. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2$?
3. Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et $H_1, H_2, .., H_k$ des hyperplans de E.
Montrer que : $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} H_i\right) \geq n-k$.
4. Soit F un sous-espace de E de dimension $n-p$ avec $p \in [\![1,n]\!]$. Montrer, par récurrence sur n, qu'il existe p hyperplans $H_1, H_2, ..., H_p$ tels que

$$F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i.$$

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.



Semaine de colle n°5

Du Lundi 7 Octobre au Vendredi 11 Octobre
Planche n°3

Question de cours

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).$$

Que dire du rang r d'un tel endomorphisme dans le cas où E est de dimension finie n ?

Exercice 1

On considère une base (u_1, u_2, u_3, u_4) de $\mathbb{R}^4$ et on introduit les sous-espaces

$$F = \mathrm{Vect}(u_1 + u_2, u_3), \quad G = \mathrm{Vect}(u_1 + u_3, u_4) \quad \text{et} \quad H = \mathrm{Vect}(u_1 + u_4, u_2).$$

1. Montrer $F \cap G = G \cap H = H \cap F = \{0\}$.
2. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Exercice 2

Soient E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel p et q deux projecteurs tels que

$$\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(q).$$

On pose $r = p + q - pq$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ et que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Semaine de colle 5
Planche 1

Question de Cours.

Soient E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p (resp q), le projecteur sur F_1 (resp F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_1).

Montrer que $p+q=id_E$ et que $pq=qp=0_{\mathcal{L}(E)}$

Exercice 1.

Pour quelles valeurs de $t\in\mathbb{R}$, la famille (v_1,v_2,v_3) où

$$v_1=(1,-t,0) \qquad v_2=(0,1,1) \qquad v_3=(t,-1,0)$$

forme-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2.

Soit $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z,t)=(x+2y+3z-2t,y+z-t,x-y+t)$$

1. Déterminer une famille génératrice puis la dimension de $Ker(f)$.
2. En déduire la dimension puis une famille génératrice de $Im(f)$.

Exercice 3.

Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que
$$E=Im(f)\oplus Ker(f)\Leftrightarrow Im(f)=Im(f\circ f)$$
2. Déterminer un contre-exemple en dimension infinie. *Indication : prendre par exemple* $E=\mathbb{R}[X]$.

Semaine de colle 5
Planche 2

Question de Cours.
Écrire une fonction `occurences(T)` qui prend en argument une chaîne de caractères `T` et renvoie un dictionnaire associant à chaque caractère présent dans `T` le nombre d'occurrences de celui-ci.

Exercice 1.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (x + y + z, x + y + 2z, x + 2y + 3z)$$

Justifier que f est bijective, autrement dit que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $F_\alpha = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ |P(\alpha) = 0\}$

1. Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Comment peut-on caractériser la condition $P(\alpha) = 0$?
3. En déduire une famille génératrice puis la dimension de F_α.

Exercice 3.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux sous-ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ de E des fonctions paires et impaires respectivement.

Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Semaine de colle 5
Planche 3

Question de Cours.
Énoncé du théorème du rang. Cas particulier des endomorphismes en dimension finie. On attend une explication de chaque équivalence du Théorème 8.

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (-x + 2y + 3z, x + 2y + z)$$

1. Déterminer la dimension de $Im(f)$ et de $Ker(f)$
2. En déduire une base de chacun de ces deux sous-espaces.

Exercice 2.
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonction continues sur $[a,b]$. On pose

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_a^b f(t)\,dt = 0 \right\} \qquad\qquad G = \{ f \in E \mid f \text{ constante } \}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Phi\colon \mathbb{K}_{n+1}[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ l'application définie par

$$\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Montrer que Φ est bien définie (que faut-t-il vérifier ?) et que Φ est linéaire.
2. Déterminer le noyau puis l'image de Φ.

A] **Question de cours :**

Énoncé du théorème du rang. Cas particulier des endomorphismes en dimension finie.

Exercices :

1) Soit $\varphi : R_3[x] \to R^2$, définie par : $\varphi(P) = (P(-1), P(2))$. Démontrer que φ est linéaire de $R_3[x]$ dans R^2. Déterminer $\ker\varphi$. Que peut-on en déduire pour φ ?

2) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, x_0 un vecteur non nul de E et φ une forme linéaire non nulle sur E. Pour tout x de E, on pose : $f(x) = \varphi(x)x_0$.

a) Montrer que f est linéaire puis déterminer son rang.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.

c) Soit k un entier naturel non nul. Calculer f^k .

B] **Question de cours :**

Soient E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Soit p (resp. q) le projecteur sur F_1, (resp. F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_2).
Montrer que : $p+q=id_E$ et que $poq=qop=0_{L(E)}$.

Exercices :

1) Dans l'espace vectoriel des fonctions définies de R dans R, que peut-on dire des familles (f_1,f_2,f_3,f_4) et (f_1,f_2,f_4) avec : $f_1(x)=1$; $f_2(x)=\cos(x)$; $f_3(x)=\cos(2x)$ et $f_4(x)=\cos^2(x)$

2) Soit f l'application définie sur K[X] par : $f(P)(X) = P(X+1)-P(X)$

a) Montrer que f est un endomorphisme de K[X] et que Kerf = K.

b) Pour n>0, on considère f_n , la restriction de f à $K_n[X]$.
Montrer que Im $f_n = K_{n-1}[X]$ puis en déduire que f est surjective.

c) Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $f_n^p = 0$.
En déduire que, pour tout P de $R_{n-1}[X]$: $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j) = 0$.

C] **Question de cours :**

Soient E un espace vectoriel et $f \in L(E)$. Montrer que : $f\circ f=0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f)\subset \mathrm{Ker}(f)$.
Que dire du rang r d'un tel endomorphisme dans le cas où E est de dimension finie n ?

Exercices :

1) Soit $T : \mathcal{F}(\{1,2,\ldots n\},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$
$T(f) = (f(1),f(2),\ldots\ldots f(n))$
Montrer que T est linéaire. Déterminer son noyau ; que peut-on en déduire pour T ?

2) Soit pour tout $k \in [\![0;n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Montrer que la famille $(P_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $R_n[X]$.

b) Donner la décomposition de $Q = \frac{d^n}{dX^n}(X^n(1-X)^n)$ dans cette base.

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

En plus :

1) Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension 3, tels que $F \neq G$. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

2) Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E, nilpotent d'indice m .

a) Montrer que : $m \leq n$.

b) Soit p un projecteur de E tel que Ker(p) ⊂ Ker(f).

Montrer que : $\forall j \geq 2, pof^j = (pof)^j$

3) Soit B=(e_1,e_2,…..,e_n) une base de E, un espace vectoriel de dimension n. Pour tout j de $[\![1; n]\!]$ on pose : $e'_j = (\sum_{i=1}^{n} e_i) - e_j$. Montrer que la famille B'= (e'_1, e'_2, ….., e'_n) est une base de E.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour BERNARD Simon
le mar. 8 oct. 24

Semaine 5

Espaces vectoriels et applications linéaires

Question de cours. Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Montrer que

$$f \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}\,(f).$$

Que dire du rang r d'un tel endomorphisme dans le cas où E est de dimension finie n ?

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on pose :

- $\mathrm{V} = \{f \in \mathrm{E} \mid f(0) = f(1) = 0\}$
- $\mathrm{W} = \{f \in \mathrm{E} \mid f = f''\}$.

1. Démontrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels de E.

2. Démontrer que W est de dimension 2 et déterminer une base de W.

3. Démontrer que V et W sont supplémentaires dans E.

Exercice 2.

Élements de correction
BERNARD SIMON

Exercice 1. • On suit le schéma classique pour prouver que V et W sont des sous-espaces vectoriels de E.
• En résolvant l'équation différentielle $f'' = f$, on montre que $W = \mathrm{Vect}(\exp; \frac{1}{\exp})$ ou encore $W = \mathrm{Vect}(\mathrm{ch}, \mathrm{sh})$.
• *Montrons que* $V \cap W = \{0\}$, en prenant $f \in V \cap W$. On écrit $f = a\exp + \frac{b}{\exp}$; mais $f(0) = f(1) = 0 \implies a = b = 0$ d'où le résultat.
Montrons que $E \subset V \bigoplus W$ en prenant $f \in E$ et en raisonnant par analyse-synthèse. Pour avoir $f = g + h$ avec $g \in V$ et $h = a\exp + \frac{b}{\exp} \in W$, on doit avoir $\begin{cases} f(0) = a + b \\ f(1) = a\mathrm{e} + b\mathrm{e}^{-1} \end{cases}$. Le système est de Cramer donc il existe bien un couple (a, b) qui vérifie cette relation. En synthèse, on définit (a, b) comme la solution de ce système et on pose $h = a\exp + \frac{b}{\exp} \in W$ puis $g = f - h$. Il est clair que $g \in V$. On a donc bien une décomposition sous la forme $f = g + h$, d'où $E \subset V \bigoplus W$. CQFD.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour GENILLON Aurélien
le mar. 8 oct. 24

Semaine 5

Espaces vectoriels et applications linéaires

Question de cours. Soient E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Soit p (resp. q) le projecteur sur F_1 (resp. F_2) parallèlement à F_2 (resp. F_1).
Montrer que $p + q = id_E$ et que $pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Exercice 1. On note :

- E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont 2π-périodiques ;
- G l'ensemble des fonctions $h \in E$ telles que $\forall x \in [0\,,2\pi],\ h(x) = 0$.

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Démontrer que $E = F \bigoplus G$.

Exercice 2.

Élements de correction
GENILLON AURÉLIEN

Exercice 1.
• On suit le schéma classique pour prouver que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
• On a clairement $F \cap G = \{0_E\}$ donc la somme $F + G$ est directe. Puis, étant donnée $f \in E$, on définit $h \in F$ on posant $\forall x \in [0\,,2\pi],\ h(x) = f(x)$ et en prolongeant h par 2π-périodicité ; et on définit $g \in G$ par $g = f - h$, en vérifiant qu'on a bien $\forall x \in [0\,,2\pi],\ g(x) = 0$.
Il est alors clair que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = h(x) + g(x)$, i.e. $f = h + g$, d'où l'inclusion $E \subset F \bigoplus G$. CQFD.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour REMUS-ABELLA Luciano
le mar. 8 oct. 24

Semaine 5

Espaces vectoriels et applications linéaires

Question de cours. Écrire une fonction `occurences(T)` qui prend en argument une chaîne de caractères `T` et renvoie un dictionnaire associant à chaque caractère présent dans `T` le nombre d'occurrences de celui-ci.

Exercice 1. Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose :

- $F = \left\{P \in E \mid \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$;
- $G = \mathrm{Vect}(X^2 + X + 1)$.

1. Démontrer que F est un hyperplan de E.

2. Démontrer que $E = F \bigoplus G$.

3. On note p_F le projecteur de E sur F, parallèlement à G.

Pour $Q \in E$, exprimer $p_F(Q)$ en fonction de Q et de $\int_0^1 Q(t)\,dt$.

Exercice 2.

Élements de correction
REMUS-ABELLA LUCIANO

Exercice 1.

- $F = \operatorname{Ker}\Phi$, avec $\Phi \colon P \mapsto \int_0^1 P(t)\,dt$ qui est une forme linéaire sur E. Le théorème de caractérisation des hyperplans permet de conclure.

- $\Phi(X^2 + X + 1) = \frac{11}{6} \neq 0$ donc $G \cap F = \{0\}$. La somme est alors directe et les dimensions assurent que $E = F \bigoplus G$.

- Soit $Q \in E$: $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, $Q = p_F(Q) + \lambda(X^2 + X + 1)$. Or $\Phi(X^2 + X + 1) = \frac{11}{6}$ donc $\Phi(Q) = 0 + \frac{11}{6}\lambda$, d'où $\lambda = \frac{6}{11}\int_0^1 Q(t)\,dt$.

  On en déduit que $p_F(Q) = Q - \left(\frac{6}{11}\int_0^1 Q(t)\,dt\right) \times (X^2 + X + 1)$.

Exercice 2.