Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°6

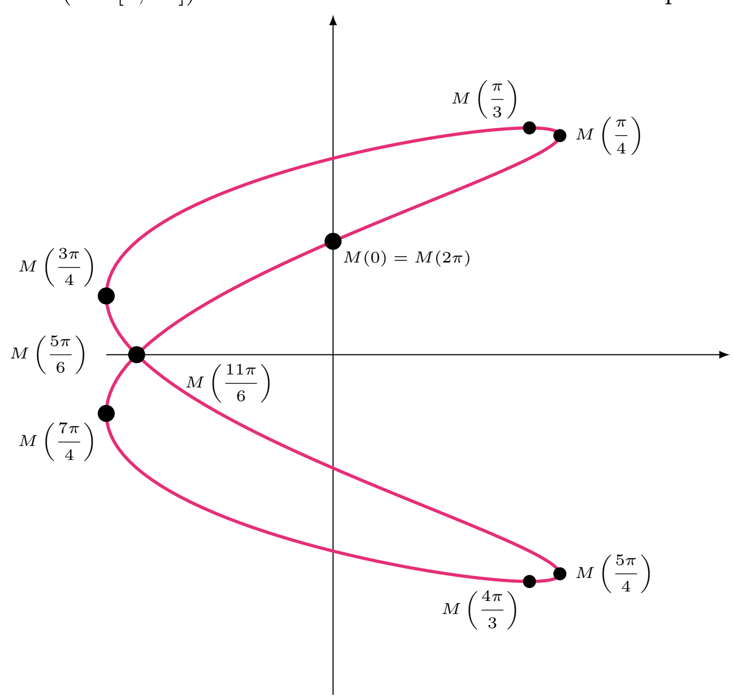
Du Lundi 14 Octobre au Vendredi 18 Octobre
Planche n°1

Question de cours

Montrer que la courbe Γ paramétrée par $M : t \mapsto \left(2t - \dfrac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$ possède un unique point double dont on donnera les coordonnées.

Exercice 1

Dresser les tableaux de variations (sur $[0, 2\pi]$) des fonctions coordonnées de la courbe paramétrée représentée ci dessous



Exercice 2

Déterminer le type de point singulier de l'astroïde définie par $x(t) = \cos^3 t, y(t) = \sin^3 t$. Pourquoi l'astroïde n'a-t-elle pas de branche infinie?

Exercice 3

Étudier et construire la courbe paramétrée par $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\ln\left(\left|\tan\dfrac{t}{2}\right|\right) + \cos(t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) \end{array}\right.$

Mathématiques PT. 2024 - 2025

Mathématiques & Informatique - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`
Lycée Voltaire, Paris 11e.

Semaine de colle n°6

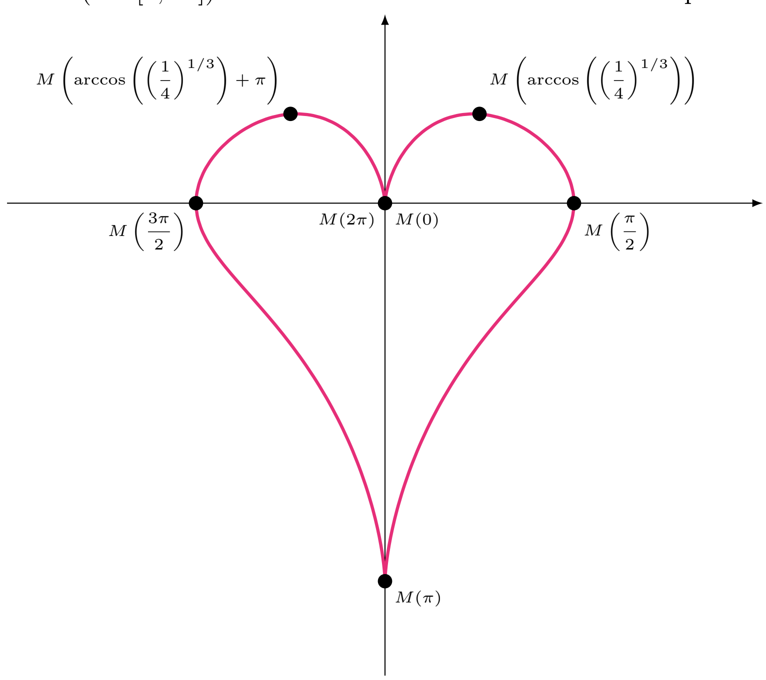
Du Lundi 14 Octobre au Vendredi 18 Octobre
Planche n°2

Question de cours

Montrer que la courbe Γ paramétrée par $M: \ t \mapsto \left(t+\dfrac{1}{t},\ t+\dfrac{1}{2t^2}\right)$ admet un unique point singulier dont on précisera la nature.

Exercice 1

Dresser les tableaux de variations (sur $[0, 2\pi]$) des fonctions coordonnées de la courbe paramétrée ci-dessous :



Exercice 2

Étudier complètement et tracer la courbe paramétrée par $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 4\cos(t)\sin(t) \\ y(t) & = & \cos(t)+\sqrt{3}\sin(t) \end{array}\right.$

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 . On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P) = P + (1-X)P'$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$ puis une base de $\ker(u)$.
3. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Semaine de colle n°6

Du Lundi 14 Octobre au Vendredi 18 Octobre
Planche n°3

Question de cours

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que : $f \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Que dire du rang r d'un tel endomorphisme dans le cas où E est de dimension finie n ?

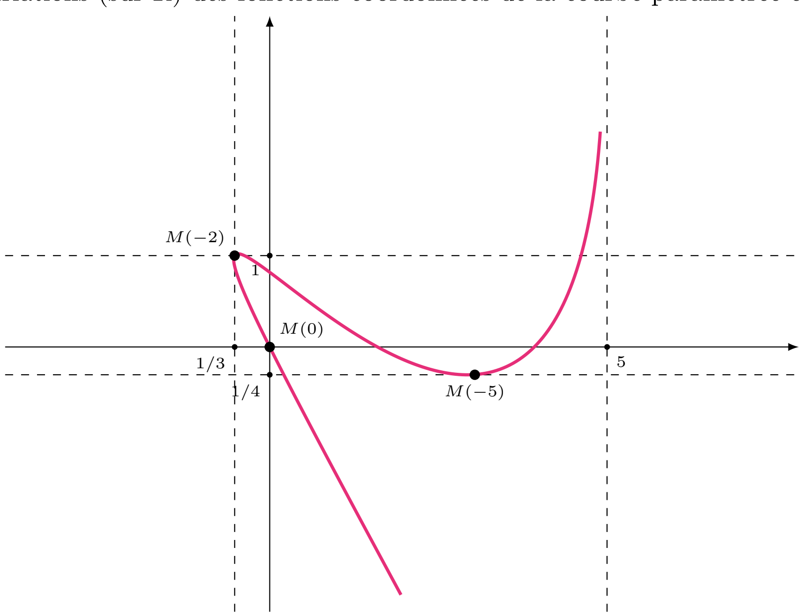
Exercice 1

Étudier le point singulier en $(1, 0)$ de la courbe paramétré par $\begin{cases} x(t) & = 1 + t^2 + \dfrac{1}{2}t^3 \\ y(t) & = t^2 + \dfrac{1}{2}t^3 + 2t^4 \end{cases}$.

On précisera donc la nature du point et on donnera un vecteur tangeant. Enfin, on dessinera l'allure locale de la courbe en ce point singulier.

Exercice 2

Dresser les tableaux de variations (sur $\mathbb{R}$) des fonctions coordonnées de la courbe paramétrée ci-dessous :



Exercice 3

Tracer la courbe paramétrée d'équation $t \mapsto (\exp(\sin(2t)), \exp(\cos(t)))$. On précisera en particulier le point double.

Semaine de colle 6
Planche 1

Question de Cours.

Montrer que la courbe Γ paramétrée par $M\colon t \mapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}\,, 2t + t^2\right)$ possède un point double dont on donnera les coordonnées.

Exercice 1.

Déterminer la nature du point singulier en 0 de la courbe paramétrée par $t \mapsto (\ln(1+t^2), e^t - t)$ et donner une équation de sa tangente en ce point

Exercice 2.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ des applications linéaires.

1. On note $\tilde{g}$ la restriction de g à $Im(f)$. Montrer que $Im(\tilde{g}) = Im(g \circ f)$ et que $Ker(\tilde{g}) = Ker(g) \cap Im(f)$
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$dim(Ker(g \circ f)) \leq dim(Ker(f)) + dim(Ker(g))$$

Semaine de colle 6
Planche 2

Question de Cours.

Montrer que la courbe Γ paramétrée par $M\colon t \mapsto \left(t + \frac{1}{t}, t + \frac{1}{2t^2}\right)$ admet un unique point singulier dont on précisera la nature.

Exercice 1.

On considère la courbe Γ paramétrée par $t \mapsto (\cos(t), \sin(3t))$ où $t \in [-\pi,\pi]$.

1. Déterminer les points multiples de Γ.
2. Déterminer les tangentes en ces points.
3. Γ possède-t-elle des points singuliers ? Justifier.

Exercice 2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f\colon E \to F$, $g\colon F \to E$ des applications linéaires. On suppose de plus que $f \circ g = Id_F$.

Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et en déduire ses éléments caractéristiques.

Semaine de colle 6
Planche 3

Question de Cours.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et s une symétrie vectorielle de E. Montrer que $E = Ker(s - id_E) \oplus Ker(s + id_E)$.

Exercice 1. Montrer que la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\frac{t^2}{1+t}, \frac{t^4}{1+t}\right)$ possède un point singulier et en déterminer la nature.

Exercice 2.
On considère la courbe Γ paramétrée par $t\colon\ \left(\cos(t), \sin^3(t)\right)$ où $t \in [-\pi; \pi]$.

1. Déterminer les points singuliers de Γ.
2. Déterminer une équation de la tangente à Γ en un point régulier et identifier les tangentes horizontales.
3. Déterminer la nature des points singuliers et une équation des (demi-) tangentes en ces points.
4. Γ possède-t-elle des points multiples ? Justifier.
5. Dresser le tableau de variation des fonctions coordonnées et en déduire une allure de Γ.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour DUSSART Hugo
le mar. 15 oct. 24

Semaine 6

Algèbre linéaire – Courbes paramétrées

Question de cours. Montrer que la courbe Γ paramétrée par $M \colon t \in \mathbb{R}^* \mapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$ possède un unique point double dont on donnera les coordonnées.

Exercice 1. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on pose :

- $\Phi \colon P \in E \mapsto P(0) + P(1)$;
- $H = \{P \in E \mid P(0) + P(1) = 0\}$.

1. Démontrer que Φ est une forme linéaire de E.
2. En déduire que H est un hyperplan de E, puis en donner une équation dans la base canonique de E.
3. On note $F = \mathrm{Vect}(X)$. Démontrer que $E = H \bigoplus F$.
4. On note p_H le projecteur de E sur H, parallèlement à F.
   Pour $Q \in E$, exprimer $p_H(Q)$ en fonction de Q.

Élements de correction
DUSSART Hugo

Exercice 1.

- Φ est à valeurs de $\mathbb{R}$ puis on montre que c'est une application linéaire (schéma classique) : d'où le résultat.
- Ainsi $\mathrm{H} = \operatorname{Ker} \Phi$ est un hyperplan (théorème de cours).

  Puis, avec $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + a_3\mathrm{X}^3$, $\mathrm{P} \in \mathrm{H} \iff 2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.
- $\Phi(\mathrm{X}) = 1 \neq 0$ donc $\mathrm{H} \cap \mathrm{F} = \{0\}$. La somme est directe et les dimensions assurent que $\mathrm{E} = \mathrm{H} \bigoplus \mathrm{F}$.
- Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{E}$: $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{Q} = p_{\mathrm{H}}(\mathrm{Q}) + \lambda\mathrm{X}$. Or $\Phi(\mathrm{X}) = 1$ donc $\Phi(\mathrm{Q}) = 0 + \lambda \times 1$, d'où $\lambda = \Phi(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(0) + \mathrm{Q}(1)$. On en déduit que $p_{\mathrm{H}}(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q} - (\mathrm{Q}(0) + \mathrm{Q}(1))\,\mathrm{X}$.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour JONARD Thibault
le mar. 15 oct. 24

Semaine 6

Algèbre linéaire – Courbes paramétrées

Question de cours. Montrer que la courbe Γ paramétrée par $\mathrm{M} : t \in \mathbb{R}^* \mapsto \left(t + \dfrac{1}{t}, \, t + \dfrac{1}{2t^2}\right)$ admet un unique point singulier dont on précisera la nature.

Exercice 1. Soit $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] / \ \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = 0\}$.

Soit W le polynôme défini par $\mathrm{W}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$.

1. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ puis déterminer $\dim(\mathrm{F})$.
2. Soit $\Phi : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathrm{F}$ défini par $\Phi(\mathrm{P}) = \mathrm{P}.\mathrm{W}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[\mathrm{X}], \mathrm{F})$ puis que Φ est bijective.
   En déduire une (autre) base de F.
3. Soit $\Delta : \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ défini par $\Delta(\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X})$ pour tout $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
   Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ et déterminer son noyau ainsi que son image.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ défini par $f = \Phi \circ \Delta \circ \Phi^{-1}$.
   Donner une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$.

Exercice 2.

Élements de correction
JONARD Thibault

Exercice 1.

- F est un sev de $\mathbb{R}_4[X]$: schéma classique. Puis $P = \sum_{i=0}^{4} a_i X^i \in F \iff (a_0 = 0 \wedge a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0)$ $P \in \text{Vect}(X - X^4, X^2 - X^4, X^3 - X^4)$ (et cette famille est libre) donc $\dim(F) = 3$.
- Φ est un morphisme (clair) injectif (car $\Phi(P) = PW = 0 \implies P = 0$) . Puisque $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim F$, un théorème du cours donne la bijectivité.
- Δ est un endomorphisme (clair) et, pour $P = p_0 + p_1 X + p_2 X^2$, $\Delta(P) = 2p_2 X + p_2 + p_1$. Ainsi, $P \in \text{Ker}\,\Delta \iff p_2 = p_1 = 0 \iff P \in \text{Vect}(1)$ et $P \in \text{Im}\,\Delta \iff P \in \text{Vect}(1, X)$.
- On détermine les images de la base de F identifiée précédemment : $f(W) = 0$, $f(X.W) = \Phi(\Delta(X)) = \Phi(1) = W$ et $f(X^2 W) = \Phi(\Delta(X^2)) = \Phi(2X + 1) = 2XW + W$. On a donc $\text{Vect}(W) \subset \text{Ker}\, f$ et $\text{Vect}(W, XW) \subset \text{Im}\, f$ et le théorème du rang ainsi que les dimensions respectives assurent que ces inclusions sont en fait des égalités.

Exercice 2.

Pierre-Alain Sallard
chez Frédéric Gaunard
Classe de PT – 2024/2025

Pour MORANDINI Stefanu
le mar. 15 oct. 24

Semaine 6

Algèbre linéaire – Courbes paramétrées

Question de cours. Soient E un $\mathbb{K}$−espace vectoriel et s une symétrie vectorielle de E. Montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathrm{E}}) \bigoplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

Exercice 1. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos t - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.
On déterminera notamment la nature des points singuliers de $\mathcal{C}$.

Exercice 2.

Élements de correction
MORANDINI STEFANU

Exercice 1.

On remarque que $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc $\mathcal{C}$ admet une symétrie par rapport à l'axe (Ox) et on se limite à une étude sur $[0\,,\pi]$.

$\begin{cases} x'(t) = 2\sin t + 2\sin(2t) = 4\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2} \\ y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t) = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2} \end{cases}$, d'où le tableau suivant :

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	$-$	0
$x(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	4
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0	$+$	0	$-$	

On calcule $\begin{cases} x^{(2)}(t) = 2\cos t + 4\cos(2t) \\ y^{(2)}(t) = -2\sin t + 4\sin(2t) \end{cases}$, puis $\begin{cases} x^{(3)}(t) = -2\sin t - 8\sin(2t) \\ y^{(3)}(t) = -2\cos t + 8\cos(2t) \end{cases}$.

Le point origine $O(t = 0)$ est singulier : $\vec{u}(x^{(2)}(0) = 6; y^{(2)}(0) = 0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{v}(x^{(3)}(0) = 0; y^{(3)}(0) = 6)$, donc ce point est un point de rebroussement de 1ère espèce, où la tangente à la courbe est dirigée selon $\vec{u}$, i.e. horizontalement.

Le point $M(t_1 = \frac{2\pi}{3})$ est singulier : $\vec{u'}(x^{(2)}(t_1) = -3; y^{(2)}(t_1) = -3\sqrt{3})$ n'est pas colinéaire à $\vec{v'}(x^{(3)}(t_1) = 3\sqrt{3}; y^{(3)}(t_1) = -3)$, donc ce point est un point de rebroussement de 1ère espèce.

Compte-tenu de la symétrie d'axe (Ox), la courbe $\mathcal{C}$ ressemble à un triangle concave.

Exercice 2.

A] **Question de cours :**

Soient E un K−espace vectoriel et s une symétrie vectorielle de E.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(s - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + id_E)$.

Exercices :

1) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, x_0 un vecteur non nul de E et φ une forme linéaire non nulle sur E. Pour tout x de E, on pose : $f(x) = \varphi(x)x_0$.

a) Montrer que f est linéaire puis déterminer son rang.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.

c) Soit k un entier naturel non nul. Calculer f^k .

2) Etudier la courbe de Lissajous suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \cos(3t) \end{cases}$$

B] **Question de cours :**

Montrer que la courbe Γ paramétrée par M : $t \longmapsto \left(t + \frac{1}{t}; t + \frac{1}{2t^2}\right)$ admet un unique point singulier dont on précisera la nature.

Exercices :

1) Soit f l'application définie sur K[X] par : f(P)(X) = P(X+1)-P(X)

a) Montrer que f est un endomorphisme de K[X] et que Kerf = K.

b) Pour n>0, on considère f_n , la restriction de f à $K_n[X]$.
Montrer que Im $f_n = K_{n-1}[X]$ puis en déduire que f est surjective.

c) Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $f_n^p = 0$.
En déduire que, pour tout P de $R_{n-1}[X]$: $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j) = 0$.

2) Construire la courbe Γ admettant le paramétrage : $\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases}$, $t \in R$

C] **Question de cours :**

Montrer que la courbe Γ paramétrée par M : $t \longmapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}; 2t + t^2\right)$ possède un unique point double dont on donnera les coordonnées.

Exercices :

1) Soit pour tout $k \in [\![0;n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

a) Montrer que la famille $(P_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base de $R_n[X]$.

b) Donner la décomposition de $Q = \frac{d^n}{dX^n}(X^n(1-X)^n)$ dans cette base.

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

2) Construire la courbe Γ admettant le paramétrage : $\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$, $t \neq 0$